**MINISTERUL ȘTIIN** **Ţ EI ȘI INVᾸŢAMῘNTULUI AL R.S.S. MOLDOVA**

**UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA**

**Catedra de Analiză Matematică**

**Gheorghe I.Rusu**

**ANALIZA FUNC Ţ IONALĂ I**

**( SPAŢII METRICE, SPAŢII NORMATE ȘI SPAŢII HILBERT )**

**Lucrare didactică**

**Aprobată**

**de Consiliul facultăţii de**

**matematică si cibernetică a**

**Universităţii de Stat din Moldova**

**Chişinău - 1991**

Gheorghe I.Rusu. Analiza funcţionala I (Spaţii metrice,spaţii normate şi spaţii Hilbert) : Lucrare didactica . – Chisinau : U.S.M.,1991

Recomandata de catedra de analiza matematica.

Redactor responsabil - M.A.BARCARI, conferenţiar universitar

Recenzenţi : A.E.BARBAROSIE, candidat in stiinţe fizico-matematice;

A.A.SEMENŢUL, conferenţiar universitar

© Universitatea de stat din Moldova,1991

**C U P R I N S**

1. **SPAŢII METRICE**

**§ 1. Spaţii metrice. Exemple** 7

**§ 2. Inegalităţile Young, Hölder şi Minkowski 11**

**§ 3. Spaţiile metrice *Cm*, *Rm*, *lp*(*m*), *l*∞(*m*). *lp*, *Cp*[*a*, *b*] 15**

**§ 4. Convergenţa într-un spaţiu metric 17**

**§ 5. Mulţimi deschise şi mulţimi închise 23**

**§ 6. Spaţii metrice separabile 27**

**§ 7. Şiruri fundamentale 34**

**§ 8. Spații metrice complete 36**

**§ 9. Completatul unui spaţiu metric 41**

**§ 10. Teorema Cantor despre un şir descrescător de mulţimi închise 45**

**§ 11. Mulţimi rare. Teorema Baire 48**

**§ 12. Aplicaţii de contracţie. Principiul aplicatiilor de**

**contractie 50**

**§ 13. Aplicaţii generalizate de contracţie 53**

**§ 14. Aplicaţii ale piincipiului de contracţie 54**

**§ 15. Mulţimi compacte 60**

**§ 16. Teorema Hausdorff şi unele consecinţe 64**

**§ 17. Criteriul de compacitate în spaţiul C[a, b] 68**

**§ 18. Acoperiri. Teorema Borel 71**

**§ 19. Funcţii continue pe mulţimi compacte 73**

**II. SPAȚII LINIARE NORMATE**

**§ 20. Spaţii liniare normate. Definiţii. Exemple 76**

**§ 21. Subspaţii. Sume directe de subspaţii 84**

**§ 22. Serii în spaţii normate 86**

**§ 23. Spaţii Banach cu bază 89**

**§ 24. Spaţii cît 92**

**§ 25. Izomorfismul spaţiilor normate finit dimensionale 96**

**§ 26. Compacitatea şi spaţiile finit dimensionale 101**

**§ 27. Spaţiile Lp(T, Σ, μ) (1 ≤ p <∞) 103**

**§ 28. Spaţiul L∞(T, Σ, μ) 110**

**III. SPATII HILBERT**

**§ 29. Spaţii Hilbert. Exemple 112**

**§ 30. Proprietatea caracteristică a spaţiilor prehilbertiene 117**

**§ 31. 0rtogonalitate în spaţiile prehilbertiene 122**

**§ 32. Distanţa de la un punct la o mulţime convexă 125**

**§ 33. Proiecţia unul vector pe un subspaţiu 129**

**§ 34. Sisteme ortonormate complete 132**

**§ 35. Serii Fourier în spaţii Hilbert 136**

**§ 36. Izomorfismul spaţiilor Hilbert separabile 141**

**§ 37. Baze ortonormate în unele spații concrete 144**

**Bibliografie 148**

Prezenta lucrare este adresată studenţilorcare studiază analiza funcţională la facultăţile de matematică. Conţinutul lucrării corespunde acelui compartiment al programei de analiză functională ce prevede studierea spaţtiilor metrice, spaţiilor normate şi spaţiilor Hilbert şi reprezintă, de fapt, cursul de prelegeri susţnut de autor in decursul mai multor ani la facultatea de matematică si cibernetică a Universitaţii de Stat din Moldova.

In lucrare se examinează un şir de exemple in vederea ilustrarii aplicaţiilor şi aprofundării materiei teoretice. Un numar suficient de astfel de exemple cititorul poate găsi in [*8*].

Deşi lucrarea este adresata nemijlocit studenţilor ce studiază analiza functională, ea poate fi folosită si in cadrul studierii cursurilor de analiză matematică şi de topologie.

Autorul aduce sincere mulţămiri docentilor M.A.Barcari si A.A.Semenţul care au luat cunostinţă de lucrare, contribuind la imbunătăţirea acesteia.

**\**

**I.SPAŢII METRICE**

**§ 1. Spaţii metrice. Exemple.**

În analiza matematică se studiază cîteva definiţii a noţiunii de limită: limita unui şir de numere reale, limita unui şir de vectori *n*-dimensionali, limita unui şir uniform convergent de funcţii, etc. Dacă analizăm atent aceste definiţii, observăm, că toate au ceva comun, şi anume: şirul (de numere, vectori *n*-dimensionali, funcţii) converge către *x*, dacă „distanţa" dintre *xn* şi *x* tinde către zero. În dependenţă de natura elementelor şi de faptul cum înţelegem „distanţa" dintre elemente obţinem definiţia noţiunii de limită sub diferite forme. Această situaţie ne sugerează ideea de a introduce pentru elementele unor mulţimi o definiţie generală a distanţei care ar generaliza cazurile particulare menţionate mai sus şi încă multe altele.

Pentru orice două mulţimi nevide *X* şi *Y* vom nota prin *X* × *Y* produsul cartezian al acestor mulţimi, adică mulţimea

*X* × *Y* = { (*x*, *y*) : *x* ∈ *X*, *y* ∈ *Y*}

**Definiţia 1.** Se numeşte distanţă (sau metrică) într-o mulţime *X* orice funcţie nenegativă : *X* × *X* → R ce posedă următoarele proprietăţi (axiomele distanţei):

1. (*x*, *y*) = 0 dacă şi numai dacă *x* = *y*;
2. (*x*, *y*) = (*y*, *x*) oricare ar fi *x, y* ∈ *X*;
3. (*x*, *z*) ≤ (*x*, *y*) + (*y*, z) pentru orice *x, y, z* **∈***X* (inegalitatea triunghiului).

*Observaţie.* Din axiomele 1-3 rezultă, că funcţia : *X* × *X* → *R* este nenegativă.

Într-adevăr, 0 = (*x*, *x*) ≤ (*x*, *y*) + (*y*, *x*) = 2 (*x*,*y*).

Prin urmare, în definiţia distanţei condiţia, conform căreia se cere că funcţia

: *X* × *X* → *R* să fie nenegativă, poate fi omisă.

**Definiţia 2.** Se numeşte spaţiu metric orice mulţime nevidă în care este definită o distanţă.

Spaţiul metric se notează prin (*X*,) sau . Dacă este clar, despre ce metrică este vorba, vom scrie simplu *X*. Elementele unui spaţiu metric se mai numesc şi puncte.

Fie (*X*,) un spaţiu metric oarecare. Dacă Y este o submulţime nevidă a mulţimii *X*, atunci, considerînd pe Y aceeaşi distanţa între elementele ei ca şi în *X*, obţinem un spaţiu metric nou (Y, ) care se numeşte subspaţiu al spaţiului metric (*X*,).

Menţionăm cîteva proprietăţi ale distanţei.

1. Pentru orice (n ∈ ) are loc inegalitatea (*x1*, *xn*) ≤ ≤ (*x1*, *x2*) + (*x2*, *x3*) + … + (*xn-1*, *xn*), numită inegalitatea poligonului (prin analogie cu axioma triunghiului). Această proprietate se obţine direct din 3), utilizînd metoda inducţiei matematice.
2. Pentru orice *x*, *x*′, *y*, *y*′ ∈*X* este adevărată inegalitatea

| (*x*, *y*) (*x*', *y*')| ≤ (*x*, *x*′) + (*y*, *y*′) , (1)

numită inegalitatea patrulaterului. Conform proprietăţii 1) avem

(*x*, *y*) ≤ (*x*, *x*′) + (*x*′, *y*') + (*y*′, *y*), sau (*x*, *y*) (*x*′, *y*′) ≤ (*x*, *x*′) + (*y*, *y*′) (2)

În mod analog obţinem

(*x*′, *y*′) (*x*, *y*) ≤ (*x*, *x*′) + (*y*, *y*′) sau ( (*x*, *y*) (*x*′, *y*′)) ≤ (*x*, *x*') + (*y*, *y*′)

(3)

Din (2) şi (3) rezultă (1).

***Exemple.***

1. Fie *X* = *C* mulţimea numerelor complexe, sau *X* = *R* mulţimea numerelor reale, sau *X* = *Q* mulţimea numerelor raţionale. Funcţia (*x*, *y*) = |*x* - *y*| (*x*, *y* ∈ *X*) defineşte o distanţă în *X*. Axiomele 1 -3 ale metricii se verifică nemijlocit şi deci (*X*, ) este un spaţiu metric. Spaţiul metric *R* este un subspaţiu al spaţiului metric *C*, iar *Q* este un subspaţiu al spaţiului metric *R* şi al spaţiului metric *C*.

2. Fie *X* o mulţime nevidă arbitrară. Să arătăm că funcţia

defineşte o distanţă pe *X*.

Axiomele 1) şi 2) evident sînt satisfăcute. Vom demonstra că este satisfăcută şi axioma 3). Este suficient să considerăm cazul *x* ≠ *z*. Relaţiile *x* = *y* şi *y* = *z* implică *x* = *z* şi deci în cazul *x* ≠ *z* are loc cel puţin una dintre relaţiile *x* ≠ *y*, *y* ≠ *z*. De aici rezultă că partea dreaptă a inegalităţii triunghiului este egală cu 1 sau 2, în timp ce partea stîngă este egală cu 1. Astfel este satisfăcută şi 3). Spaţiul metric obţinut se numeşte spaţiu metric discret sau spaţiu metric al punctelor izolate.

Acest exemplu ne arată că metrica poate fi definită pe orice mulţime nevidă şi, prin urmare, orice mulţime nevidă poate fi organizată ca spaţiu metric.

3 *.*Fie *S* mulţimea tuturor şirurilor numerice. În *S* distanţa poate fi definită prin formula:

. (4)

Proprietăţile metricii 1) şi 2) sunt evidente. Să demonstrăm proprietatea 3).

Pentru aceasta observăm că funcţia (*t* ≥ 0) este crescătoare . Dacă , atunci

şi deci

De aici

.

Aşadar, mulţimea tuturor şirurilor numerice *S* cu distanţa definită prin formula (4) , într-adevăr formează un spaţiu metric.

4. Fie *X* mulţimea tuturor funcţiilor continue pe segmentul [*a*, *b*]. Să arătăm că prin formula

se defineşte o distanţă în *X*.

Avem= 0 dacă şi numai dacă *x*(*t*) - *y*(*t*) = 0 pentru orice *t* ∈ [*a*, *b*] sau *x*(*t*) = *y*(*t*) pentru orice *t* ∈ [*a*, *b*], adică *x* = *y*. Proprietatea a doua a distanţei este evidentă.

Să demonstrăm ultima proprietate. Fie *x, y, z* trei elemente din *X*. Avem:

şi deci

Spaţiul metric obţinut se notează prin *C*[*a*, *b*].

5.Fie *l*∞mulţimea tuturor şirurilor mărginite de numere reale sau complexe. Funcţia

defineşte o distanţă în *l*∞ şi deci *l*∞ este un spaţiu metric cu distanţa (5).

Proprietăţile distanţei l) 3) se verifică fără dificultate.

6. Spaţiul metric *c*0 este format din toate şirurile de numere reale sau complexe, convergente la zero. Distanţa în *c*0se defineşte prin formula

Spaţiul *c*0 este un subspaţiu al spaţiului metric *l*∞.

**§ 2. Inegalităţile Young, Hölder şi Minkowski**

Fie *p* > 1 un număr real şi *q -* numărul real adjunct al lui *p*, adică .

**Inegalitatea Young**: Pentru orice numere reale sau complexe *a* şi *b* are loc inegalitatea

**Demonstraţie.** Inegalitatea (1) este evidentă , dacă *a* = 0 sau *b* = 0. Admitem că *ab* ≠ 0. Considerăm funcţia , . Derivata acestei funcţii *́* = *xp*-1 – – 1 ia valoarea zero numai în punctul *x* = 1. Punctul *x* = 1 este un punct de minim al funcţiei *f* (deoarece *f* ′′(1) = *p* – 1 > 0) şi deci

De aici

. (2)

Punem în această inegalitate şi obţinem

(3)

Înmulţind ambele părţi ale ultimei inegalităţi cu (ţinînd cont de relaţia *p* + *q* = =*p* × *q)* , ajungem la inegalitatea (1). Deoarece inegalitatea (2) devine o egalitate dacă şi numai dacă *x* = l, rezultă că inegalitatea (3), şi deci şi (1), devine o egalitate dacă şi numai dacă sau .

**Inegalitatea Hölder.** Fie l < *p* < ∞; *p*-1 + *q*-1 = 1. Pentru orice două sisteme de numere reale sau complexe are loc inegalitatea

**Demonstraţie.**  Fie

Inegalitatea (4) este evidentă, dacă *A* = 0 sau *B* = 0. Vom presupune deci că *AB* ≠ 0. Aplicăm inegalitatea Young numerelor . Avem

,

. (5)

Adunăm aceste inegalităţi şi obţinem

De aici

ceea ce trebuia de demonstrat.

Trecînd în ultima inegalitate la limita cu *n* → ∞, obţinem inegalitatea Holder pentru şiruri de numere (reale sau complexe)

(6)

E bine să observăm că dacă seriile din partea dreaptă a inegalităţii (6) sînt convergente, atunci este convergentă şi seria din partea stîngă a ei.

**Notă.** Fără dificultate se constată că inegalităţile (4) şi (6) se transformă în egalităţi, dacă şi numai dacă inegalităţile (5) se transform în egalităţi, adică

sau

Demonstraţia o lăsăm pe seama cititorului.

Prin raţionamente similare se stabileşte şi inegalitatea Holder pentru funcţii.

Dacă *x, y* ∈ *C*[*a, b*], *p* > 1, *p*-1 + *q*-1 = 1, atunci

Să demonstrăm în continuare inegalităţile Minkowski

(7)

(8)

*x, y* ∈ *C*[*a, b*]. (9)

Inegalităţile (7)-(9) sunt evidente pentru *p* = 1. Dacă p > 1, atunci în virtutea inegalităţii Hölder avem

În mod analog se stabileşte şi inegalitatea (9). Prin trecere la limită în inegalitatea (7) obţinem inegalitatea (8).

Menţionăm că convergenţa seriilor din partea dreaptă a inegalităţii (8) implică convergenţa seriei din partea stîngă.

**§ 3. Spaţiile metrice *Cm*, *Rm*, *lp*(*m*), *l*∞(*m*). *lp*, *Cp*[*a*, *b*]**

1. Spaţiul metric *Cm* este format din mulţimea tuturor sistemelor *x* = (ξ1, ξ2, …, ξm) de *m* numere complexe cu distanţa

(1)

Să arătăm că formula (1) într-adevăr defineşte o distanţă. Proprietăţile 1) 2) ale distanţei sînt evidente. Vom demonstra proprietatea triunghiului. Fie . Utilizăm inegalitatea Minkowski şi obţinem

1. Spaţiul metric *Rm* este format din mulţimea sistemelor de *m* numere reale cu distanţa

.

Este evident că spaţiul *Rm* este un subspaţiu al spaţiului metric *Cm*.

3.Fie *X* mulţimea tuturor sistemelor de *m* numere reale sau complexe şi *p* ≥ 1. În mulţimea *X* definim distanţa astfel

│.

Proprietăţile 1)2) ale distanţei sînt evidente. Proprietatea 3) se obţine cu ajutorul inegalităţii Minkowski. Fie Avem

Spaţiul metric obţinut se notează prin *lp*(*m*).

1. În mulţimea *X* a tuturor sistemelor de *m* numere reale sau complexe definim distanţa prin formula

Axiomele distanţei se verifică nemijlocit. Spaţiul metric obţinut se va nota cu *l*∞(*m*).

1. Fie l ≤ *p* < ∞. Vom nota cu *lp* mulţimea tuturor şirurilor de numere reale sau complexe pentru care seria

este convergentă. Distanţa în *lp* se va defini prin formula

Convergenţa seriei (2) rezultă imediat din inegalitatea Minkowski.

Proprietăţile 1) şi 2) ale distanţei sînt evidente, iar proprietatea 3) se deduce utilizînd inegalitatea Minkowski.

1. Spaţiul *Cp*[*a*, *b*] (l ≤ *p* < ∞) este format din mulţimea tuturor funcţiilor continue pe segmentul [*a*, *b*] cu distanţa

*x, y* ∈ *Cp*[*a, b*]).

Deoarece funcţia este continuă şi nenegativă, integrala definită a ei este egală cu zero, dacă şi numai dacă această funcţie este egală cu zero.

Prin urmare:

Proprietatea 2) este evidentă, iar proprietatea 3) rezultă din inegalitatea Minkowski pentru funcţii (utilizăm procedeul din exemplul 3).

**§ 4. Convergenţa într-un spaţiu metric**

**Definiţia** **1.** Şirul de puncte ale spaţiului metric *X* se numeşte convergent, dacă există un punct *a* ∈ *X* cu propretatea

adică pentru orice ε > 0 există *n*0 = *n*0(ε) ∈ *N* , astfel încît pentru orice *n* *n*0.

Punctul *a* în acest caz se numeşte limita şirului şi se scrie

sau *xn* → *a*.

Din această definiţie imediat rezultă

**Teorema 1.** Dacă şirul este convergent şi

atunci orice subşir al acestui şir de asemenea este convergent şi

**Teorema 2.** Limita oricărui şir convergent este unică.

**Demonstraţie.** Fie

Utilizînd inegalitatea triunghiului, obţinem

şi deci ρ(*a, b*) = 0, ceea ce implică *b* = *a*.

**Definiţia 2.** Se numeşte sferă (sau sferă deschisă) cu centrul *a* şi de rază *r* în spaţiul metric *X* mulţimea

*S*(*a*, *r*) = {*x* ∈ *X*: ρ(*x*, *a*) < *r*}.

Orice sferă cu centrul în punctul *a* se numeşte vecinătate a acestui punct.

Utilizînd noţiunea de vecinătate, putem afirma că şirul converge către punctul *a* ∈ *X*, dacă orice vecinătate a acestui punct conţine termenii şirului cu excepţia unui număr finit de termeni.

**Definiţia 3.** Mulţimea *M* ⊂ *X* se numeşte mărginită, dacă există o sferă *S*(*a*, *r*) care conţine mulţimea *M*.

*Observaţie.* Dacă mulţimea *M* este mărginită şi *M* ⊂ *S*(*a*, *r*) atunci pentru orice *b* ∈ *X* există un număr pozitiv τ astfel încît *M* ⊂ *S*(*b*; τ) .

E suficient să punem τ = *r* + ρ(*a*, *b*). Într-adevăr, dacă *x* ∈ *M*, atunci ρ(*x*, *a*) < *r* şi deci

ρ(*x*, *b*) ≤ ρ(*x*, *a*) + ρ(*a*, *b*) < *r* + ρ(*a*, *b* ) = τ,

adică *x* ∈ *S*(*b*, τ).

**Teorema 3.** Orice şir convergent este mărginit.

**Demonstraţie.** Fie

Există *n*0 ∈ *N* astfel încît < l pentru orice *n* ≥ *n*0. Dacă *r* = l + max{ρ(*x*1, *a*), …, ρ(, *a*), 1} atunci, evident, (*n* =1, 2, …) şi deci ⊂ *S*(*a*, *r*).

Afirmaţia reciprocă acestei teoreme nu este adevărată. De exemplu, şirul este mărginit în spaţiul metric *R*, însă nu este convergent.

**Teorema 4.** În orice spaţiu metric distanţa este o funcţie continuă, adică relaţiile

implică

**Demonstraţie.** Din inegalitatea patrulaterului imediat rezultă:

şi deci

Să ne oprim mai amănunţit la studiul convergenţei în unele spaţii metrice concrete.

**Teorema 5.** Convergenţa în spaţiul metric *Rm* (*Cm*) este echivalentă cu convergenţa în coordonare, adică şirul , converge în *Rm*(*Cm*) la *a* = (*a*1, *a*2, …, *am*) dacă şi numai dacă

**Demonstraţie.** Vom demonstra teorema pentru spaţiul *Cm*.

Pentru început demonstrăm inegalităţile

Avem

pentru orice *k* = l, 2, ..., *m* , ceea ce implică inegalitatea

Pe de altă parte

Din inegalitatea (1) obţinem

ceea ce în mod evident implică afirmaţia teoremei.

**Teorema 6.** Convergenţa în spaţiul *lp* implică convergenţa în coordinate (către acelaşi element).

**Demonstraţie.** Fie  *xn* şi *xn* → *a* în spaţiul *lp*. Este evident că

Întruc avem (k=l, 2,...).

Afirmaţia reciprocă nu este adevărată. Este suficient să observăm că şirul (*en* = (0, …,0, l, 0, ...)) converge în coordonate către 0 = (0, 0, …). În acelaşi timp ρ (*en*, 0) = 1 pentru orice *n* ∈ *N* şi deci şirul nu converge la 0 în *lp*.

În mod analog se demonstrează că convergenţa în spaţiile *l*∞ şi *c*0 implică convergenţa în coordonate, iar afirmaţia reciprocă nu este adevărată.

**Teorema** 7. Convergenţa în spaţiul *C*[*a*, *b*] este echivalentă cu convergenţa uniformă a şirului respectiv de funcţii.

**Demonstraţie.** Fie *x*, *xn* ∈ *C*[*a*, *b*]. Conform definiţiei convergenţei într-un spaţiu metric, şirul converge către *x*, dacă şi numai dacă pentru orice ε > 0 există *n*0*=**n*0 *(* ∈ *N* , astfel încît

oricare ar fi *n* *n*0. (2)

În spaţiul *C*[*a, b*] inegalitatea (2) ia forma

Această inegalitate, evident ,este echivalentă cu inegalitatea

Prin urmare, şirul converge către *x* în spaţiul *C*[*a, b*], dacă şi numai dacă pentru orice ε > 0 există *n*0 *(* ∈ *N* , astfel încît

ceea ce coincide cu convergenţa uniformă a şirului de funcţii către *x*(*t*).

**Teorema 8.** Convergenţa şirului în spaţiul *C* [*a, b*] către *x* implică convergenţa şirului către acelaşi punct în spaţiul *Cp*[*a, b*].

Demonstraţia rezultă imediat din inegalitatea:

Ultima inegalitate se demonstrează astfel:

Afirmaţia reciprocă acestei teoreme nu este adevărată. Iată exemplul respectiv: şirul în *Cp*[0,1] converge către 0, însă în *C* [0; 1] nu converge către 0 ( este diverjent !).

În mod direct se demonstrează că în spaţiul Sconvergenţa este echivalentă cu convergenţa în coordonate.

**§ 5. Mulţimi deschise şi mulţimi închise**

Noţiunile de mulţime deschisă şi de mulţime închisă într-un spaţiu metric, precum şi unele proprietăţi ale lor, sînt cunoscute din cursul de analiză matematică. Avînd în vedere însă importanţa lor, am găsit de cuviinţă să amintim proprietăţile principale ale acestor clase de mulţimi.

Fie *X* un spaţiu metric şi *M* o mulţime din *X*.

**Definiţia** **1.** Se zice că punctul *x* ∈ *M* este punct interior al mulţimii *M*, dacă există o vecinătate *S*(*x*, ε) a acestui punct , astfel încît *S*(*x*, ε) ⊂ *M*.

**Definiţia 2.** Mulţimea *M* se numeşte deschisă dacă ea este formată numai din puncte interioare, adică pentru orice *x* ∈ *M*  există *S*(*x*, ε) ⊂ *M*.

**Exemple:**

1. În spaţiul metric *R* mulţimea *M =*(*a, b*) este deschisă, iar *M*1 = [*a, b*) nu este deschisă (punctul *a* nu este punct interior al mulţimii *M*).
2. Într-un spaţiu metric arbitrar *X* orice sferă *S*(*a, r*) este o mulţime deschisă. Într-adevăr, fie *x*0∈ *S*(*a, r*). Punem *r*1 = *r -* ρ(*x*0, *a*) şi vom arăta că *S*(*x*0, *r*1) ⊂ *S*(*a, r*). Dacă *x* ∈ *S*(*x*0, *r*1), atunci ρ(*x, a*) ≤ ρ(*x*, *x*0) + ρ(*x*0, *a*) *r*1 + ρ(*x*0, *a*) = *r,* adică *x* ∈ *S*(*a*, *r*). Prin urmare, sfera *S*(*a, r*) împreună cu orice punct *x*0 conţine şi o vecinătate a acestui punct şi deci mulţimea este deschisă.
3. Orice spaţiu metric *X* este, evident, o mulţime deschisă.

**Teorema 1.** Reuniunea oricărei familii de mulţimi deschise este o mulţime deschisă. Intersecţia unui număr finit de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

**Demonstraţie.** Fie {*G*α}α∈A  un sistem de mulţimi deschise şi

Dacă *x*0 ∈ *G,* atunci *x*0 aparţine cel puţin unei mulţimi . Mulţimea , fiind deschisă, conţine o sferă *S*(*x*0, *r*). Însă *G* ⊃ ⊃ *S*(*x*0, *r*) şi deci mulţimea *G* este deschisă. Fie acum

,

unde *Gj* sînt mulţimi deschise.

Dacă *x*0 ∈ *G*, atunci *x*0 ∈ *Gj* şi deci există ε*j* > 0, astfel încît *Gj* ⊃ *S*(*x*0, ε*j*), *j* = l, 2, ..., *m*. Pentru

avem: *S*(*x*0, ε) ⊂ *S*(*x*0, ε*j*) ⊂ *Gj*  (*j* = l, 2, ..., *m*) şi deci

Aşadar, mulţimea *G* conţine punctul *x*0 împreună cu o vecinătate *S*(*x*0, ε) şi deci orice *x*0 ∈ *G* este un punct interior al acestei mulţimi, adică *G* este deschisă.

**Definiţia 3.** Se zice că punctul *x*0 ∈ *X* este punct de aderenţă al mulţimii *M* ⊂ *X*, dacă *S*(*x*0, ε) ∩ *M* ≠ ∅ oricare ar fi ε > 0.

**Definiţia 4.** Mulţimea tuturor punctelor de aderentă ale mulţimii *M* se numeşte închiderea mulţimii *M* şi se notează .

Este evident că pentru orice mulţime *M* ⊂ *X*  avem *M* ⊂ .

**Teorema 2.** Punctul x ∈ *X* este un punct de aderenţă al mulţimii *M* (adică *x* ∈ ), dacă şi numai dacă există un şir ⊂ *M* , convergent către *x*.

**Demonstraţie.** Dacă *x* este un punct de aderenţă al mulţimii *M*,atunci

Alegem cîte un punct şi obţinem şirul ⊂ *M*  cu adică xn → x.

Reciproc, fie xn ∈ *M*, xn → x. Din definiţia limitei unui şir de puncte ale spaţiului metric rezultă că pentru orice ε > 0 toţi termenii şirului ⊂ *M*  , cu excepţia unui număr finit de termeni, aparţin sferei *S*(*x*, ε). Prin urmare *S*(*x*, ε) ∩ *M* ≠ 0 şi deci *x* este un punct de aderenţă al mulţimii *M*.

**Definiţia 5.** Se zice că mulţimea *M* este închisă dacă = *M*.

**Teorema 3.** Mulţimea *M* este închisă dacă şi numai dacă pentru orice şir , *xn* → *x* implică *x* ∈ *M*.

**Demonstraţie.** Fie *M* o mulţime închisă şi , *xn* → *x*. Conform teoremei 2, punctul *x* este un punct de aderenţă al mulţimii *M*, adică *x* ∈ .Însă = *M* şi deci *x* ∈ *M*.

Reciproc, fie că *M* posedă proprietatea: , *xn* → *x* implică *x* ∈ *M*. Aceasta înseamnă că *M* conţine toate punctele de aderenţă şi deci ⊂ *M*.

Deoarece incluziunea *M* este evidentă, rezultă că *M* = , adică *M* este mulţime închisă.

***Consecinţă.*** Orice sferă închisă

este o mulţime închisă în spaţiul metric *X*.

Într-adevăr, fie . Utilizînd continuitatea distanţei obţinem

şi deci .

**Teorema 4.** În orice spaţiu metric *X* complementara oricărei mulţimi deschise (închise) este o mulţime închisă (deschisă).

**Demonstraţie.** Fie mulţimea *G* deschisă, *xn* ∈ *F* = *X* | *G*, . Admitem că *x* ∉ *F*. Atunci *x* ∈ *X* | *F* =*G*  şi deci există o sferă *S*(*x*, ε) ⊂ *G*. Însă şi deci *xn* ∈ *S*(*x*, ε) (*n* *n*0). Prin urmare *xn* ∈ *G*  (*n* *n*0) , ceea ce este imposibil. Rezultă că *x* ∈ *F*. Conform teoremei 3 mulţimea *F* este închisă.

Fie acum *F* o mulţime închisă. Să demonstrăm că *G* = *X* \ *F* este deschisă. Admitem contrariul. Atunci nu orice punct al mulţimii *G* este interior şi deci există *a* ∈ *G* , astfel încît orice vecinătate *S*(*a*, ε) nu se include în *G*. Prin urmare , *S*(*a*, ε) ∩ *F* ≠ 0 (∀ε > 0), ceea ce arată că *a* ∈ . Însă = *F* şi deci *a* ∈ *F*, adică punctul *a* aparţine atît mulţimii *G* cît şi complementarei *F* a acestei mulţimi. Contradicţie. Deci mulţimea *G* este deschisă.

Utilizînd principiul de dualitate şi teoremele 1, 4 obţinem

**Teorema** 5. Intersecţia oricărei familii de mulţimi închise este o mulţime închisă. Reuniunea unui număr finit de mulţimi închise este o mulţime închisă.

**Demonstraţie.** Fie un sistem de mulţimi închise şi Avem

=()

Mulţimile sunt deschise şi deci este deschisă. Însă atunci mulţimea este închisă.

În mod analog, dacă *Fj* (*j* = 1, 2, ..., *m*) sunt mulţimi închise şi

atunci

De aici imediat rezulta partea a doua a teoremei.

În continuare menţionăm cîteva proprietăţi ale operaţiei de închidere.

**Teorema 6.** Pentru orice mulţimi din spaţiul metric *X* avem

**Demonstraţie.** Proprietăţile a) - c) se verifică fără dificultate. Vom demonstra proprietatea d). Incluziunea este evidentă. Să demonstrăm incluziunea inversă. Fie *a* ∈ . Avem

oricare ar fi *r* > 0. Fie . Sfera , fiind o mulţime deschisă, există . Însă şi deci . De aici şi din incluziunea rezultă că . Numărul *r* > 0 este arbitrar şi deci . Prin urmare .

**Consecinţă**. Închiderea oricărei mulţimi este o mulţime închisă.

**§ 6. Spaţii metrice separabile**

**Definiţia 1.** Fie *M*1 şi *M*2 două mulţimi din spaţiul metric *X*. Mulţimea *M*1 se numeşte densă în *M*2 **,** dacă ⊃ *M*2*.* Mulţimea *M* ⊂ *X* se numeşte densă în spaţiul *X* sau peste tot densă, dacă = *X.*

Este evident că mulţimea *M* este peste tot densă, dacă pentru orice *x* ∈ *X* avem

*S*(*x*, ε) ∩ *M* ≠ ∅ oricare ar fi ε > 0, adică pentru orice *x* ∈ *X* şi orice ε > 0 există *y*∈ *M ,* astfel încît ρ(*x, y*) < ε.

**Definiţia 2.** Se zice că spaţiul metric *X* este separabil, dacă în acest spaţiu există o mulţime finită sau numărabilă *M* ={*x*} şi peste tot densă.

Chiar din definiţie rezultă, că dacă spaţiul metric *X* este format dintr-un număr finit sau numărabil de puncte, atunci el este separabil. În particular, spaţiul metric *Q* este separabil. Dăm exemple de spaţii metrice separabile şi spaţii metrice neseparabile.

1. Spaţiul metric *R* este separabil. În acest spaţiu mulţimea *Q* este peste tot densă şi numărabilă.
2. Spaţiul metric *Rm* este separabil. Peste tot densă în *Rm* este mulţimea

Întradevăr, fie , ε > 0. Alegem (*j* = l, 2, 3, …, *m*) astfel încît

Punctul

Mulţimea *M* este numărabilă şi deci *Rm* este un spaţiu separabil.

1. Se vede uşor că în spaţiul *Cm*  peste tot densă este mulţimea

Această mulţime este numărabilă şi deci *Cm* este spaţiu separabil.

1. Spaţiul *lp*(l < *p* < ∞) este separabil. Pentru simplitate vom considera spaţiul *lp* real. Să notăm prin *Mn* mulţimea:

*Mn* = {z = (1,  2, …, 0, 0, ...),  *i* ∈ *Q*}.

Această mulţime este numărabilă şi deci numărabilă este şi mulţimea

a tuturor şirurilor de rang finit de numere raţionale. Să arătăm că *M* este peste tot densă.

Fie , ε > 0. Alegea *n*0 ∈ *N* astfel ca:

Avînd numărul *n*0 alegem numerele raţionale cu proprietatea

Fie Este clar că *z*0 ∈ *M* şi

Prin urmare, pentru orice *x* ∈ *lp* şi orice ε > 0, există *z*0 ∈ *M* , astfel încît şi deci mulţimea *M* este densă în *lp*. Mulţimea *M* , fiind şi numărabilă, rezultă că spaţiul *lp* este separabil.

În spaţiul *lp* complex peste tot densă este mulţimea şirurilor de rang finit de numere complexe, partea reală şi partea imaginară a cărora sînt numere raţionale. Această mulţime fiind numărabilă, rezultă ca şi spatiul *lp* complex este separabil.

Acelaşi raţionament ne permite să demonstrăm că spaţiul *c*0 este separabil.

1. Spaţiul *C*[*a, b*] este separabil. Vom demonstra că în *C*[*a, b*] peste tot densă şi numărabilă este mulţimea *M* a tuturor polinoamelor cu coeficienţi raţionali. Notăm prin *Mn* mulţimea polinoamelor de gradul n cu coeficienţi raţionali. Dacă z∈ *Mn ,* atunci (∈Q ). Relaţia ϕ: z → (*r*0, *r*1, …, *rn*) este o bijecţie a mulţimii *Mn* pe mulţimea sistemelor de *n* + 1 numere raţionale şi deoarece ultima mulţime este numărabilă, numărabilă va fi şi mulţimea *Mn* . Însă şi deci *M* este numărabilă.

Fie *x* ∈ *C*[*a, b*], ε > 0. Conform teoremei Weierstrass, există un polinom

,

astfel încît

Fie

Avînd numerele şi α , alegem numerele rationale asfel ca

Punem

Avem

Deci

şi prin urmare

De aici rezultă, că mulţimea *M* este densă în *C*[*a, b*]. Mulţimea *M* , fiind şi numărabilă, spaţiul *C*[*a, b*] este separabil.

1. Spaţiul *Cp*[*a, b*] este separabil. În acest spaţiu peste tot densă este mulţimea *M* a polinoamelor cu coeficienţi raţionali. Aceasta rezultă imediat din e). Într-adevăr, fie *x* ∈ *Cp*[*a, b*] ε > 0. Din p. e) rezultă existenţa polinomului *z* ∈ *M* astfel încît

Avem

Mulţimea *M* , fiind numărabilă, spaţiul *Cp*[*a, b*] este separabil.

1. Spaţiul *l*∞ nu este separabil. Să demonstrăm că orice mulţime numărabilă în *l*∞ nu este peste tot densă. Ne vom limita la cazul spaţiului real. Fie deci

Definim în modul următor:

Avem (,) =|

De aici imediat rezultă că şi deci mulţimea M = nu este densă în *l*∞ . Prin urmare, în spaţiul *l*∞ nu există mulţimi numărabile şi peste tot dense, adică *l*∞ este un spaţiu metric neseparabil.

**Teorema 1.** Orice subspaţiu *Y* al unui spaţiu metric separabil *X*este de asemenea separabil.

**Demonstraţie.** Fie mulţimea densă în *X*, un şir de numere pozitive, convergent către zero. Ca de obicei, prin ρ(*x, Y*) vom nota distanţa de la punctul *x* pînă la mulţimea *Y* în spaţiul *X*,adică

În particular

Conform definiţiei marginii inferioare , pentru orice > 0 există ∈ *Y* astfel încît

(1)

Să arătăm că mulţimea *M*1 ⊂ *Y* , este densă în *Y*. Fie *y* ∈ *Y*, ε > 0. Deoarece *M* este densă în *X*, rezultă că există astfel încît iar din

că există *n*0 ∈ *N* cu proprietatea Din inegalitatea triunghiului şi (1) avem

Însă e clar că distanţa de la la mulţimea *Y* nu întrece distanţa de la la un punct arbitrar al acestei mulţimi şi deci

De aici şi din (2) avem

Ne-am convins că *M*1 este densă în *X* şi, deoarece *M*1 este numărabilă, rezultă că *Y* este spaţiu metric separabil.

Deosebit de utilă în problema stabilirii neseparabilităţii unor spaţii metrice este teorema 2.

**Teorema 2.** Fie *X* un spaţiu metric. Dacă există o mulţime nenumărabilă Г ⊂ *Х* şi un număr δ > 0, astfel încît pentru *x*α, *x*β ∈Г, *x*α ≠ *x*β avem ρ( *x*α, *x*β) ≥ δ, atunci spaţiul metric *X* este neseparabil.

**Demonstraţie.** Admitem contrariul, adică *X* este separabil şi o mulţime peste tot densă. Considerăm numărul . Pentru orice *x* ∈ *X* există cu adică

Prin urmare

Mulţimea Г, fiind nenumărabilă, iar mulţimea sferelor cel mult numărabilă, există o sferă care conţine nu mai puţin de două puncte ale mulţimii Г*.*

Fie

În acest caz avem:

Am obţinut o contradicţie , de unde şi rezultă afirmaţia teoremei.

Utilizînd această teoremă, obţinem încă o demonstraţie a neseparabilităţii spaţiului *l*∞. E suficient să observăm că mulţimea Гa tuturor şirurilor cu sau este nenumarabilă şi dacă , atunci .

**§ 7. Şiruri fundamentale**

**Definiţie:** Se spune că şirul de puncte din spaţiul metric *X*este şir fundamental (sau şir Cauchy), dacă pentru orice număr ε > 0 există un număr natural *n*0 **= =***n*0(ε), astfel încît ρ(*xn*, *xm*) < ε oricare ar fi *n, m* > *n*0.

Să demonstrăm cîteva proprietăţi simple ale şirurilor fundamentale.

**Teorema 1.** Orice şir fundamental este mărginit.

**Demonstraţie.** Fie - un şir fundamental. Pentru ε = 1 există *n*0 ∈*N* astfel încît ρ(*xn*, *xm*) < 1 (*n, m* ≥ *n*0). În particular , ρ(*xn*, ) < l (*n* ≥ *n*0). Dacă

atunci şi deci

**Teorema 2**. Fie un şir fundamental şi δk > 0 (*k* = l, 2 , … ). Există un subşir astfel încît

**Demonstraţie.**  Şirul fiind fundamental, există *n*1 ∈ *N*, astfel încît *n, m* ≥ *n*1 implică şi, în particular, (*n* ≥ *n*1). În mod analog există *n*2 > *n*1 , astfel încît *n, m* ≥ *n*2 implică şi, în particular, . (*n* ≥ *n*2). Prelungind acest procedeu, vom obţine şirul de numere naturale cu proprietăţile: *n*k+1 > *n*k  pentru orice *n*≥ *n*k (*k* = l, 2, …). În particular, dacă în ultima

**Consecinţă**. Orice şir fundamental conţine un subşir astfel încît seria

este convergentă.

Este suficient să punem in teoremă

**Teorema 3.** Dacă şirul fundamental conţine un subşir convergent şi atunci şirul este convergent şi .

**Demonstraţie.** Fie ε > 0. Există *n*0 ∈ *N* astfel încît (*n, m* ≥ *n*0). Deoarece există *j*0 ∈ *N* astfel încît pentru orice *j* *j*0 sînt adevărate inegalităţile

Fie acum *n* ≥ *n*0 . Avem

Prin urmare şirul este convergent şi

**Teorema 4.** Orice şir convergent este fundamental.

**Demonstraţie**. Fie

şi ε > 0. Alegem *n*0 ∈ *N* astfel ca pentru orice *n* *n*0 să avem . Dacă *n, m* ≥ *n*0, atunci

**§ 8. Spații metrice complete**

În paragraful precedent ne-am convins că într- un spaţiu metric orice şir convergent este fundamental. Afirmaţia reciprocă în caz general nu este adevărată. În legătură cu aceasta introducem următoarea definiție.

**Definiţie.** Spaţiul metric *X* se numeşte complet, dacă în acest spaţiu orice şir fundamental este convergent.

1. Spaţiul metric *R* este complet. Aceasta rezultă din criteriul general Cauchy de convergenţă al şirurilor de numere reale.
2. Spaţiul metric *Q* nu este complet.

Să arătăm că şirul este fundamental în *Q*, însă nu este convergent în acest spaţiu. Şirul dat este convergent în *R* şi

Orice şir convergent este şi fundamental şi deci este fundamental în *R*. Spaţiul *Q* este un subspaţiu al spaţiului *R*, şirul ⊂ *Q* şi deci este fundamental în *Q*. Admitem că acest şir este convergent în *Q.* Există atunci *a* ∈ *Q* astfel încît

în spaţiul *Q* şi deci

în *R.* Din proprietatea de unicitate a limitei unui şir convergent obţinem *e* = *a* ∈ *Q* În cursul de analiză matematică însă se demonstrează că numărul *e* ∉ *Q*. Contradicţia obţinută arată că şirul dat nu este convergent în *Q.*

Prin urmare şirul ,fiind fundamental în *Q* , în acelaşi timp nu este convergent în acest spaţiu şi deci spatiul *Q* nu este complet.

1. Spaţiul metric *C* este complet. Rezultă nemijlocit din criteriul general Cauchy de convergenţă al şirurilor de numere complexe.
2. Spaţiul *Rm* este complet. Fie un şir fundamental în *Rm*,
3. Pentru orice ε > 0 există *n*0 ∈ *N,* astfel încît (*n, k* ≥ *n*0) şi deci

De aici rezultă că şirurile numerice (*j* = l, 2, …, *m*) sînt fundamentale şi deci convergente. Fie

Deoarece convergența în spaţiul *Rm* este echivalentă cu convergenţa în coordonate, rezultă că

În mod analog se demonstrează completitudinea spaţiilor *Cm*, *lp*(*m*), *l*∞(*m*).

1. Spaţiul *lp* (1 *p* < ∞) este complet. Fie un şir fundamental în *lp ,* și ε > 0. Există *n*0 ∈ *N,* astfel încît (*n, k* ≥ *n*0). Însă

şi deci şirul numeric este fundamental. Prin urmare şirul este convergent. Fie

Din inegalitatea (1) avem

(*n, k* ≥ *n*0)

pentru orice număr natural M.

Trecînd în ultima inegalitate la limita cu *k* → ∞, obținem

De aici

adică

Notăm Din inegalitatea Minkowski avem

şi deci *x* ∈ *lp*. Inegalitatea (2) afirmă, că (*n* ≥ *n*0). Deoarece ε > 0 este arbitrar, urmează că şirul converge în spaţiul *lp* şi

Prin urmare spaţiul *lp* este complet.

1. Spaţiul *C*[*a*, *b*] este complet. Fie un şir fundamental . Pentru orice ε > 0 există *n*0*=**n*0 *(* ∈ *N,* astfel încît (*n, m* ≥ *n*0). Avem

Aplicăm criteriul Cauchy de convergenţă uniformă al şirului fundamental de funcţii şi obţinem că şirul converge uniform către o funcţie continuă *x*(*t*). Întrucît convergenţa în spaţiul *C*[*a, b*] coincide cu convergenţa uniformă al şirului respectiv de funcţii, rezultă că şirul converge în *C*[*a, b*] către *x*. Prin urmare orice şir fundamental este convergent în *C*[*a, b*] şi deci spaţiul *C*[*a, b*] este complet.

1. Spaţiul *Cp*[*a, b*] nu este complet.

E suficient să arătăm că în acest spaţiu există un şir fundamental care nu converge. În acest scop considerăm şirul

Acest şir este fundamental. Într-adevăr,

(3)

Pentru orice ε > 0 alegem ∈ *N* astfel ca 2 Dacă *n* ≥ , atunci din (3) rezultă că oricare ar fi *k* ∈ *N* și deci șirul este fundamental.

Admitem că șirul converge către *x* în spațiul *Cp*[*a, b*]. Fie Alegem *n*0∈ *N* astfel ca pentru *n* ≥ *n*0. Atunci, evident, avem (4)

Din convergenţa şirului către *x* rezultăiar inegalitatea (4) în acest caz implică

(5)

Funcţia fiind continuă şi nenegativă, din egalitatea (5) deducem că *x*(*t*) = 1 (τ ≤ *t* ≤ *b*). Punctul τ a fost luat arbitrar pe deci *x*(*t*) = l pe acest interval. În mod analog obţinem *x*(*t*) =1 pe Aceasta însă este imposibil, deoarece funcţia *x*(*t*) este continuă pe [*a, b*]. Prin urmare, şirul nu este convergent.

1. Spaţiul metric discret este complet. În acest spaţiu şirul este fundamental, dacă şi numai dacă există un număr *n*0 ∈ *N* astfel încît *xn* = *n*0 . De aici imediat rezultă că orice șir fundamental în acest spaţiu este convergent.

**§ 9. Completatul unui spaţiu metric**

**Definiţie**: Fie *X* și *Y* două spaţii metrice. Se zice că spaţiile *X* şi *Y* sînt izometrice, dacă există o aplicaţie bijectivă *f* de la *X* la *Y* care păstrează distanţa, adică ρ*x*(*x*, *x*') = = ρ*y* (*f*(*x*), *f*(*x*')) oricare ar fi *x*, *x*' ∈ *X*. Aplicaţia *f* în acest caz se numeşte izometrie.

Dacă spaţiile metrice *X* şi *Y* sînt izometrice, atunci relaţiile metrice între punctele ambelor spaţii sînt aceleaşi ; diferită poate fi doar natura elementelor spaţiilor *X* şi *Y* .

**Teorema Hausdorff.** Fie *X* un spaţiu metric, care nu este complet. Există un spaţiu metric complet *Y* cu proprietăţile:

1. *X* este izometric cu un subspaţiu *Y*1 ⊂ *Y*;
2. *Y*1 este dens în *Y*.

**Demonstraţie.** Dacă şi sînt două şiruri fundamentale în *X*, atunci există

Într-adevăr, utilizînd inegalitatea patrulaterului, obţinem

Şirurile şi fiind fundamentale, există *n*0 ∈ *N* astfel încît

,

ceea ce la rîndul său implică

adică şirul numeric( este fundamental şi deci convergent.

Să considerăm mulţimea Φ(*X*) a tuturor şirurilor fundamentale de elemente din *X*. Vom spune că două şiruri fundamentale şi sînt echivalente şi vom scrie ~ dacă

Relaţia ~ într-adevăr este o relaţie de echivalenţă, adică ea posedă proprietăţile:

1. ~ (reflexivitate);
2. ~ implică (simetrie);
3. ~ ~ implică ~  (tranzitivitate).

Prin urmare această relaţie împarte mulţimea Φ(*X*) în clase de echivalenţă , astfel încît două elemente şi aparţin aceleaşi clase, dacă şi numai dacă ~ Vom nota prin *Y* mulţimea tuturor claselor de echivalenţă, iar elementele mulţimii (adică clasele de echivalenţă) prin Mulţimea *Y* devine un spaţiu metric, dacă definim distanţa în modul următor:

unde este un element arbitrar din iar din  **.** Partea dreaptă în (1) nu depinde de alegerea reprezentanţilor din şi şi deci definiţia numărului este corectă. Într-adevăr, dacă , atunci  ~ ~ şi deci

,

ceea ce implică

Să ne convingem, că relaţia (1) într-adevăr defineşte o distanţă pe mulţimea *Y*. Dacă  atunci pentru avem

Reciproc , fie şi Atunci

şi deci ~ ceea ce implică

Proprietatea 2) a distanţei rezultă din şirul de egalităţi

În sfîrşit, fie. Atunci

Deci mulţimea *Y ,* în adevăr formează un spaţiu metric cu distanţa definită prin relaţia (1).

Să notam cu *Y*1 submultimea lui *Y* , avînd ca elemente clasele care au ca reprezentanţi şirurile constante. Dacă sînt reprezentate respectiv de şirurile {*x*, *x*,...} şi {*y*, *y*,...}, atunci

(2)

Aplicaţia *f*: *X* → *Y*1 definită prin formula *f*(*x*) = este, în virtutea egalităţii (2), o izometrie a spaţiilor *X* şi *Y*1.

Să arătăm acum că mulţimea *Y*1 este densă în *Y*. Fie , ε > 0 şi Prin aici vom nota clasa reprezentată de şirul constant (*xn*, *xn*,...). Şirul fiind fundamental, există *n*0 ∈ *N* , astfel încît (*m, n*  *n*0).

De aici obţinem

,

adică

Însă ∈ *Y*1 şi deci = Y.

În sfirşit vom demonstra că spaţiul metric *Y* este complet. Fie un şir fundamental în *Y*. Subspaţiul *Y*1 fiind dens în *Y,* există ∈ *Y*1 astfel încît

Fie (*xn*, *xn*,...)∈ *f* () = . Avem

De aici, avînd în vedere că şirul  este fundamental, obţinem : pentru orice ε > 0 există *n*0 ∈ *N* , astfel încît, oricare ar fi . Este clar că numărul *n*0 poate fi luat astfel ca . Din (3) avem

(4)

adică şirul este fundamental. Acest şir defineşte un element ∈ *Y.*

Dacă , atunci utilizînd (4), obţinem

Deci şirul  este convergent. Prin urmare spaţiul metric *Y* este complet.

Spaţiul metric *Y* cu proprietăţile a) şi b) din teoremă se numeşte completatul spaţiului metric *X*. Se poate demonstra că dacă *Z* este un alt spaţiu metric complet ce conţine un subspaţiu *Z*1 dens în *Z* şi care este izometric cu *X*, atunci *Z* este izometric cu *Y*. Cu alte cuvinte, completatul unui spaţiu metric se determină cu precizie de izometrie.

**§ 10. Teorema Cantor despre un şir descresc**ă**tor de mulţimi închise**

**Definiţie.** Fie *M -* o mulţime nevidă şi mărginită în spaţiul metric *X*. Se numeşte diametrul mulţimii *M* numărul

Se vede uşor că diametrul sferei este mai mic sau egal cu 2*r*. Într-adevăr, dacă atunci

De aici avem

**Observaţie.** Diametrul sferei de rază *r* > 0 poate fi strict mai mic ca 2*r*. Fie,de exemplu, *X* spaţiul metric discret ce conţine cel puţin două puncte. Dacă *x* ∈ *X*, atunci în timp ce 2*r* = 2. Avem deci .

**Teorema 1.** (Cantor). Fie *X* un spaţiu metric complet şi şir descrescător (adică F1 ⊃ *F*2 ⊃ ... ⊃ *Fn* ⊃ …) de mulţimi închise şi nevide. Dacă

atunci există un punct care aparţine tuturor mulţimilor *Fn* şi un astfel de punct este unic.

**Demonstraţie.** Pentru orice *n* ∈ *N* fie *xn* ∈ *Fn* . Dacă *m* > *n* atunci *Fm* ⊂ *Fn* şi deci *xm*, *xn* ∈ *Fn*. Rezultă că ρ( *xm*, *xn*) < *diam* *Fn*→ 0 şi, prin urmare, pentru orice ε > 0 există *n*0 ∈ *N* astfel încît ρ( *xm*, *xn*) < *diam* *Fn*< ε(*m* > *n* ≥ *n*0) , adică şirul este fundamental. Spaţiul *X* fiind complet, rezultă că există

Deoarece  ⊂ *Fm* şi *xm*, *xm*+1,... → *x*0 , iar *Fm* este o mulţime închisă, avem *x*0 ∈ *Fm*. Numărul *m* ∈ *N* a fost luat arbitrar şi deci *x*0 ∈ *Fm* (*m* = 1, 2, …). Să demonstrăm acum unicitatea punctului comun tuturor mulţimilor *Fm*. Fie *x*0, *y*0 ∈ *Fm* (*m* = 1, 2, …). Avem

0 ≤ ρ( *x*0, *y*0) *diam* *Fm*→ 0.

De aici ρ( *x*0, *y*0) = 0 şi deci *x*0 = *y*0.

Din teorema 1 rezultă

**Teorema** 2. Fie *X* un spaţiu metric complet şi un şir descrescător de sfere închise. Dacă *rn* → 0 , atunci există un punct comun tuturor sferelor şi un asfel de punct este unic.

E suficient să observăm că şi că sfera este o mulţime închisă.

Este adevărată şi afirmaţia reciprocă acestei teoreme.

**Teorema 3.** Dacă în spaţiul metric *X* pentru orice şir descrescător de sfere închise, razele cărora tind la zero, există un punct ce aparţine tuturor acestor sfere, atunci *X* este complet.

**Demonstraţie.** Fie un şir fundamental în *X*. Conform teoremei 2 §6, din şirul dat putem extrage un subşir astfel ca (*k* = l, 2, ...). De aici urmează că Într-adevăr, dacă , atunci şi deci , adică**.** Prin ipoteză, există un punct , astfel încît (*k* = 1, 2, …). Deci şi prin urmare subşirul este convergent. Conform teoremei 3 §6, convergent este şi şirul Aşadar *X* este spaţiu metric complet.

**Observaţie.** Condiţiile teoremei 2 sunt esenţiale. Exemplele respective se construiesc fără dificultate. Vom prezenta aici doar un exemplu. Fie *X* = *R* cu metrica

Spaţiul *X* este complet. Considerăm sferele închise

Ele formează un şir descrescător. Evident, nu există un punct comun tuturor acestor sfere. În acest exemplu nu tinde la 0.

**§ 11. Mulţimi rare. Teorema Baire**

**Definiţia** **1.** Mulţimea *M* din spaţiul metric *X* se numeşte rară dacă orice sferă *S*(*a, r*) ⊂ *X* conţine o sferă *S*(*b,* ) în care nu există nici un punct din *M*, adică *S*(*b,* ) ∩ *M* ∅.

**Exemplul** **1.** În spaţiul metric *R* submulţimile *N*, *Z* sînt rare, iar *Q* nu este rară. Nu este rară în acest spaţiu nici mulţimea *N* ∪ [0, 1].

**Definiţia 2**. Spaţiul metric *X* se numeşte spaţiu de prima categorie Baire, dacă el poate fi reprezentat ca reuniunea unei familii numărările de mulţimi rare. În caz contrar *X* se numeşte spaţiu de categoria a doua Baire.

**Exemplul 2.** Spaţiul *Q* este de primă categorie Baire. Într-adevăr, *Q* este o mulţime numărabilă şi deci  *Q* = Rezultă că

unde *Xn* = şi *Xn* , evident, este mulţime rară.

Observăm că spaţiul *Q* nu este complet. Pentru spațiile complete este adevărată:

**Teorema Baire.** Orice spaţiu metric complet aste de categoria a doua Baire.

**Demonstraţie.** Fie *X* un spaţiu metric complet. Admitem contrariul, adică

unde fiecare mulţime *Xn* este rară.

Fie *S*(*a*, 1) o sferă oarecare în *X*. Deoarece *X*1 este mulţime rară, există o sferă *S*(*x*1, *r*1) ⊂ *S*(*a*, 1), astfel încît *S*(*x*1, *r*1) ∩ *X*1 = ∅. Putem evident admite (în caz de necesitate micşorăm raza sferei *S*(*x*1, *r*1)), că (*x*1, *r*1) ⊂ *S*(*a*, 1), *r*1 < şi (*x*1, *r*1) ∩ *X*1 = ∅. Deoarece *X*2 este o mulţime rară, există o sferă *S*(*x*2, *r*2)) astfel încît (*x*2, *r*2) ⊂ (*x*1, *r*1), *r*2 <  *r*1 şi (*x*2, *r*2) ∩ *X*2 = ∅. Prin inducţie, obţinem un şir descrescător {(*xn*, *rn*)} de sfere închise cu proprietăţile:

(*xn*, *rn*) ∩ *X*n = ∅, *r*n <  *r*n-1 (*n* ∈ *N*, *n* > 1).

De aici *r*n <  (*n* ∈ *N*) şi deci *r*n → 0. Conform teoremei Cantor, există un punct *b* ∈ *X* ce aparţine tuturor sferelor (*xn*, *rn*). Însă fiecare sferă (*xn*, *rn*) nu conţine puncte din *Xn* şi deci *b* ∉ *Xn* (*n* = l, 2**,** ...). De aici rezultă că

Aşadar avem simultan *b* ∈ *X* şi *b* ∉ Contradicţie.

Din această teoremă obţinem o consecinţa importantă.

**Consecinţă.** Fie *X* un spaţiu metric complet şi un şir de mulţimi închise în *X*. Dacă

atunci cel puţin una din mulţimile *Fn* conţine o sferă *S*(*x*0, *r*).

Într-adevăr, din teorema Baire rezultă că cel puţin una din mulţimile *Fn* nu este rară. Fie această mulţime . Atunci există o sferă *S*(*x*0, *r*0) astfel încît orice sferă din *S*(*x*0, *r*0) conţine puncte ale mulţimii . Prin urmare orice punct *y* ∈ *S*(*x*0, *r*0) este un punct de aderenţi al mulţimii , adică *S*(*x*0, *r*0) ⊂ =

**§ 12. Aplicaţii de contracţie. Principiul aplicatiilor de contractie**

Fie *X* un spaţiu metric şi *A*: *X* → *X* o aplicaţie a spaţiului *X* în *X*.

**Definiţia 1.** Aplicaţia *A* se numeşte aplicaţie de contracţie, dacă există un număr *q* < l astfel încît pentru orice pereche de puncte *x*, *y* ∈ *X* avem

ρ( *Ax*, *Ay*) ≤ *q*ρ (*x*, *y*).

**Definiţia 2.** Punctul *x*\* ∈ *X* se numeşte punct fix al aplicaţiei *A*: *X* → *X*, dacă *Ax*\* = *x*\*.

**Teorema Banach** (principiul aplicaţiilor de contracţie). Într-un spaţiu metric complet orice aplicaţie de contracţie posedă un punct fix şi numai unul.

**Demonstraţie.** Fie *x*0 un punct arbitrar din *X*. Formăm şirul *x*1 = *Ax*0, *x*2 = *Ax*1, ..., *x*n = *Ax*n-1, …

Avem : ρ(*x*n+1, *x*n) = ρ( *Ax*n, *Ax* n-1) ≤ *q*ρ(*x*n, *x*n-1). De aici, aplicînd metoda inducţiei matematice, obţinem

ρ( *x*n+1, *x*n) ≤ *qn* ρ(*x*1, *x*0) (*n* = 1, 2, …). (1)

Să arătăm că şirul este fundamental. Aplicăm inegalitatea poligonului şi inegalităţile (1) şi obţinem

ρ( *x*n+p, *x*n) ≤ ρ(*x*n+p, *x*n+p-1) + ρ(*x*n+p-1, *x*n+p-2) + … + ρ(*x*n+1, *x*n) ≤ ≤ (*qn+p*-1 + *qn+p*-2 +...+*qn*) ρ(*x*1, *x*0).

De aici avem

(2)

Numărul *q* < l şi deci pentru orice ε > 0 există *n*0 ∈ *N* , astfel încît

ceea ce arată că şirul într-adevăr este fundamental. Spaţiul *X* fiind complet, şirul este convergent. Fie

Avem

De aici rezultă, că şi, prin urmare, . Existenţa punctului fix este demonstrată. Să demonstrăm acum unicitatea lui.

Dacă atunci

sau

ceea ce este posibil numai dacă (deoarece l – *q* > 0), adică .

**Observaţia 1.** Din înseşi demonstraţia teoremei Banach rezultă că punctul fix al aplicaţiei de contracţie se obţine prin metoda aproximaţiilor succesive, pornind de la un punct oarecare al spaţiului.

Această observaţie indică un procedeu practic pentru determinarea prin aproximaţie a punctului fix. Dacă în inegalitatea (2) trecem la limită cu *p* → ∞, obţinem o evaluare a preciziei aproximaţiei:

**Observaţia** 2. Condiţia ρ(*Ax*, *Ay*) < ρ(*x*, *y*) nu este suficientă pentru existenţa punctului fix. Fie, de exemplu, *X*= [1, ∞) cu distanţa ρ(*x*, *y*) = | *x* *y* |.  *X* este un spaţiu metric complet. Considerăm în *X* aplicaţia . Dacă *x* ≠ *y* atunci

Aplicaţia *A* însă nu posedă un punct fix, deoarece pentru orice *x* ∈ *X* avem

**Observaţia 3.** Să ne amintim, că o funcţie *f* definită pe segmentul [*a, b*] satisface condiţia Lipschitz dacă există un număr *l* , astfel încît

Dacă *l* < 1 şi *f*: [*a, b*] → [*a, b*], atunci *f* este o aplicaţie de contracţie şi deci şirul , ( ) converge către unica pe segmentul [*a, b*] rădăcină a ecuaţiei *f*(*t*) = *t*.

În particular, condiţia Lipschitz cu *l* < 1 este satisfăcută, dacă *f* este derivabilă pe segmentul [*a, b*] și

**Observaţia 4.** Într-un spațiu metric incomplet aplicația de contracție poate să nu posede un punct fix. Fie, de exemplu, cu distanța ρ(*x, y*) = |*x* - *y*|. Funcția aplică *X* în *X*, este aplicație de contracție cu , însă nu posedă un punct fix (verificați).

**§ 13. Aplicaţii generalizate de contracţie**

Fie *A* o aplicaţie a spaţiului metric *X* în *X*. Ca de obicei prin *A*2*, A*3, …, *A*n, …vom nota puterile aplicaţiei *A,* adică aplicaţiile definite prin formulele

**Definiţie.**Aplicaţia *A*: *X* → *X* se numeşte aplicaţie generalizată de contracţie, dacă există *n*0 ∈ *N* astfel încît este aplicaţie de contracţie.

Orice aplicaţie de contracţie, evident, este în acelaşi timp şi aplicaţie generalizată de contracţie. Afirmaţia reciprocă nu este adevărată. Sa dăm un exemplu. Fie aplicaţia *A*: *C*[0,1] → *C*[0,1] definită prin relaţia

Pentru *x*(*t*) = l, *y*(*t*) = 0 avem (*Ax*)(*t*) = *t*, (*Ay*)(*t*) = 0 şi deci ρ(*x,y*) = l = ρ(*, Ay*). Prin urmare *A* nu este aplicaţie de contracţie. Să arătăm că *A*2 este aplicaţie de contracţie. Avem

Pentru aplicaţiile generalizate de contracţie este adevărată următoarea teoremă.

**Teoremă.** Orice aplicaţie generalizată de contracţie într-un spaţiu metric complet posedă un punct fix şi numai unul.

**Demonstraţie.** Fie aplicaţie de contracţie. Conform teoremei Banach , există un unic punct fix al aplicaţiei *B*. Fie *Bx*\* = *x*\*. Avem

*B*(*Ax*\*) = (*Ax*\*) = *x*\* = *A*(*x*\*) = *A*(*Bx*\*) = *Ax*\*,

adică *Ax*\* este de asemenea un punct fix al aplicaţiei *B.* Insă punctul fix al aplicatiei este unic şi deci *Ax*\* = *x*\*. Prin urmare punctul *x*\* este punct fix şi al aplicaţiei *A*. Se constată fără dificultate, că dacă *y*\* este un punct fix al aplicaţiei *A,* adică *Ay*\* = *y*\*, atunci *y*\* = *y*\*, …, *y*\*= *y*\* .Din unicitatea punctului fix al aplicaţiei *B* = rezultă că *y*\* = *x*\*. Deci aplicaţia *A* posedă un unic punct fix.

**§ 14. Aplicaţii ale piincipiului de contracţie**

Aplicaţiile de contracţie pot fi utilizate la demonstrarea existenţei şi unicităţii soluţiilor diverselor tipuri de ecuaţii. Mai mult decît atît. Demonstraţia teoremei Banach ne permite să afirmăm că aceste soluţii pot fi obţinute prin metoda aproximărilor succesive, iar formula (3) din §12, să evaluăm precizia aproximării. Ne vom limita aici doar la aplicarea rezultatelor obţinute în §12-13 la ecuaţii integrale şi la ecuaţii diferenţiale.

**a**) **Ecuaţii integrale**

Fie *k*(*t*, *s*) o funcţie continuă pe pătratul [*a, b*] × [*a, b*]. Considerăm în spaţiul *C*[*a, b*]

ecuaţia Fredholm de speţa a doua

(1)

unde *x*, *y* ∈ *C*[*a, b*], λ ∈ *R*, *y*(*t*) este o funcţie dată, iar *x*(*t*) este funcţia necunoscută.

**Teorema 1.** Fie

Pentru orice λ ∈ *R*, ecuaţia (1) are soluţie unică *x* ∈ *C*[*a, b*] oricare ar fi *y* ∈ *C*[*a, b*].

**Demonstraţie.** Considerăm în *C*[*a, b*] aplicaţia

Se vede uşor că orice punct fix al acestei aplicaţii este o soluţie a ecuaţiei (1) şi reciproc. Avem

De aici

unde . Din condiţia teoremei *q* < l şi deci *A* este o aplicaţie de contracţie. Prin urmare, conform teoremei Banach, *A* posedă un unic punct fix, adică ecuaţia (1) posedă o soluţie unică în *C*[*a*, *b*] oricare ar fi λ ∈ *R ,* și *y* ∈ *C*[*a, b*].

**Observaţie.** Din demonstraţia teoremei Banach rezultă că, în condiţiile teoremei, soluţia ecuaţiei (1) este limita în spaţiul *C*[*a, b*] al şirului unde *x*0(*t*) este o funcţie continua arbitrară , iar

…………………………………………………..

Să considerăm acum în *C*[*a, b*] ecuaţia integrală Volterra de speţa a doua

(2)

Spre deosebire de ecuaţia Fredholm, aici limita superioară în integrală este variabilă.

**Teorema 2.** Pentru orice λ ∈ *R* ecuaţia (2) posedă o soluţie unică *x* ∈ *C*[*a, b*] oricare ar fi *y* ∈ *C*[*a, b*].

**Demonstraţie.** Ca şi în teorema precedentă vom utiliza aplicaţiile de contracţie. În spaţiul *C*[*a, b*] considerăm aplicaţia definită astfel:

Este clar că *B*: *C*[*a, b*] → *C*[*a, b*] şi *x*(*t*) este soluţia ecuaţiei (2), dacă şi numai dacă *x* este un punct fix al aplicaţiei *B*.

Să demonstrăm la început că *B* este o aplicaţie generalizată de contracţie. Avem

Dacă punem

atunci din ultima inegalitate obţinem

Prin inducţie uşor stabilim că

(4)

Această inegalitate este adevărată pentru *n* = l (inegalitatea (3)). Fie (4) adevărată pentru *n* = *k*. Vom demonstra că (4) este adevărată şi pentru *n* = *k* + l.

Avem:

adică inegalitatea (4) este adevărată şi pentru *n* = *k* + l. Conform principiului inducţiei matematice, inegalitatea (4) este adevărată pentru orice *n* ∈ *N*.

Din (4) obţinem

Din cursul de analiză matematică se ştie, că pentru orice *c* ∈ *R* are loc relaţia

De aici (dacă punem c= rezultă existenţa numărului *n*0 ∈ *N* , astfel încît

Din inegalităţile (5) şi (6) avem

)

şi deci *B* este aplicaţie generalizată de contracţie. Conform teoremei din §13, *B* posedă un unic punct fix în *C*[*a*, *b*] şi deci ecuaţia (2) o soluţie unică în *C*[*a*, *b*].

Să dăm un exemplu de aplicaţie a teoremei de mai sus. Considerăm în *C*[0, 1] ecuaţia

Aici *k*(*t*, *s*) = , *y*(*t*) = *t*,

Fie *x*0(*t*) = 0. Atunci

Se vede uşor că

Însă *xn* converge în *C*[0, 1] către *x*, unde *x*(*t*) = sin t . Pe de altă parte, din demonstraţia teoremei Banach despre punctul fix rezultă că *xn* converge către punctul fix al aplicaţiei *B*, adică către soluţia ecuaţiei (7). Deci unica soluţie a ecuaţiei (7) este *x*(*t*) = sin *t*.

**b) Ecuații diferențiale**

Fie *f*(*x*, *y*) o funcţie continuă într-un domeniu *G* şi care satisface în acest domeniu condiţia Lipchitz în raport cu *y*, adică există *L* > 0, astfel încît pentru orice (*x*, *y*1), (*x*, *y*2) din *G* avem

Fie *P*(*x*0, *y*0) ∈ *G*. Vom demonstra că într-o vecinătate a punctului *x*0 ecuaţia diferenţială

are o soluţie unică şi care satisface condiţia iniţială

*y*(*x*0) = *y*0. (9)

Se vede uşor că ecuaţia (8) cu condiţia (9) este echivalentă cu ecuaţia integrală

(10)

Considerarăm o sferă (*P*, *r*) ⊂ *G*. Funcţia *f* fiind continuă în (*P*, *r*), este mărginită, deci există *M* astfel încît pentru orice (*x*, *y*) ∈ (*P*, *r*). Să alegem *d* > 0 cu proprietăţile: 1) *Ld* < l; 2) implică În spațiul mulţimea este închisă şi, deoarece este spaţiu complet, rezultă că *F* este de asemenea un spaţiu metric complet cu metrica din . Considerăm aplicaţia

Ea aplică *F* în *F*, deoarece

Cum însă

,

avem

Întrucît *q* = *Ld* < 1, din ultima inegalitate conchidem că *A* este aplicaţie de contracţie a spaţiului complet *F* în *F* şi deci A posedă în *F* un unic punct fix. Acest punct fix este unica soluţie a ecuaţiei integrale (10) şi deci unica soluţie a ecuaţiei diferenţiale (8) cu condiţia iniţială (9).

**§ 15. Mulţimi compacte**

În analiza matematică un rol important îi revine teoremei Bolzano-Weierstrass despre posibilitatea extragerii unui subşir convergent din orice şir numeric mărginit. În spaţiile metrice arbitrare astfel de posibilitate nu este, adică există mulţimi mărginite ce nu conţin subşiruri convergente. De exemplu, în spaţiul *lp* (*l* ≤ *p* < ∞) mulţimea (*en* = (0, …, 0, 1, 0)) evident este mărginită, însă ρ(*ei* , *ej*) = şi deci orice subşir al şirului nu este fundamental şi, prin urmare, nu este nici convergent.

În legătură cu aceasta, în spaţiile metrice se introduce noţiunea de mulţime relativ compactă.

**Definiţia 1.** Mulţimea *M* din spaţiul metric *X* se numeşte relativ compactă, dacă din orice şir ⊂ M se poate extrage un subşir convergent .

**Definiţia 2.** Mulţimea *M* se numeşte compactă, dacă din orice şir ⊂ M se poate extrage un subşir convergent la un punct *x0* ∈ *M*.

Se vede uşor că mulţimea *M* este compactă, dacă şi numai dacă ea este relativ compactă şi închisă.

**Exemple.** În spaţiul metric *X* = *R*:

1. mulţimea *M* = (*a, b*) este relativ compactă, însă nu este compactă;
2. *M* = [*a, b*] este mulţime compactă;
3. *M* = *N* nu este relativ compactă (şirul , *xn* = *n* nu conţine subşiruri convergente).

**Teorema 1.** Orice mulţime relativ compactă este mărginită.

**Demonstraţie.** Fie *M* o mulţime relativ compactă în spaţiul metric *X*. Admitem că *M* nu este mărginită. Atunci pentru orice *n* ∈ *N* şi *a* ∈ *X* mulţimea *M* nu se conţine în sfera *S*(*a*, *n*). Deci există *xn* ∈ *M*, *x* ∉ *S*(*a*, *n*), adică (*a*, *xn*) ≥ *n* (*n* = 1, 2, …). Şirul conţine un subşir convergent . Fie

Din continuitatea distanţei în spaţiul metric avem

Pe de altă parte (*k* = l, 2, ...) şi deci

,

ceea ce este imposibil. Contradicţie.

**Observaţie.** Exemplul de la începutul paragrafului ne arată că afirmaţia reciprocă teoremei 1 nu este adevărată în cazul spaţiilor metrice arbitrare.

Pentru spaţiile *Rm* şi *Cm* este adevărată :

**Teorema 2.** Mulţimea M ⊂ *Rm* (sau M ⊂ *Cm*) este relativ compactă, dacă şi numai dacă ea este mărginită.

**Demonstraţie.** Necesitatea rezultă din teorema 1. Să demonstrăm suficienţa , care de fapt este cunoscută din analiza matematică (teorema Bolzano-Weierstass pentru spaţiul *Rm*). Pentru simplitate vom examina cazul spaţiului *R*2. Fie deci *M* o mulţime mărginită în *R*2 şi *xn* ∈ *M*  (*n* = l, 2, ...), Mulţimea *M* fiind mărginită, există o sferă ce contine această mulţime. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că centrul sferei este punctul O(0, 0) şi deci *M* ⊂ *S*(0, *r*). Avem ∈ *S* (0, *r*), de unde obţinem

Conform inegalităţii (1), şirul numeric este mărginit şi deci conţine un subşir Fie

Considerăm acum şirul numeric . În virtutea inegalităţii (1) el este de asemenea mărginit şi deci conţine un subşir convergent.Fie

Şirul , fiind un subşir al şirului convergent este convergent de asemenea către . De aici obţinem: şirul converge în coordonate către Deoarece convergenţa în *R*2 este echivalentă cu convergenţa în coordonate, rezultă că şirul este convergent în spaţiul *R*2 şi deci mulţimea *M* este relativ compactă. Cazul general se examinează în mod analog.

**Teorema 3.** Intersecţia unui şir descrescător de mulţimi compacte nevide este o mulţime compactă nevidă. Dacă diametrul mulţimilor *Fn* tinde la zero, intersecţia lor se reduce la un punct.

**Demonstraţie.** Fie un şir descrescător de mulţimi compacte din spaţiul *X*. Luăm în fiecare *Fn* un element *xn*. Obţinem şirul situat în *F1*. Mulţimea *F1* fiind compactă, putem extrage un subşir convergent la *x*0 ∈ *F*1. Însă şirul este situat în Fn2 ⊂ F2 şi deci *x*0 ∈ *F*2.Obţinem astfel succesiv

*x*0 ∈ *Fj* (*j* ∈ *N*), deoarece . Aceasta ne arată că

Deci intersecţia şirului de mulţimi nu este vidă. Intersecţia mulţimilor închise

= F

este o mulţime închisă şi întrucît F , iar este o mulţime compactă, rezultă că

F =

este mulţime compactă. Dacă

şi *x*, *y* ∈ (*n* = 1, 2, …), atunci

şi deci , adică *x* = *y*. Prin urmare, există numai un punct comun tuturor mulţimilor

**§ 16. Teorema Hausdorff şi unele consecinţe**

**Definiţia** **1.** Fie ε > 0 un număr pozitiv arbitrar. Mulţimea *A* din spaţiul metric *X* se numeşte ε - reţea pentru mulţimea *M* ⊂ *X*, dacă pentru orice *x* ∈ *M* există *y* ∈ *A* , astfel ca ρ(*x*, *y*) < ε.

Cu alte cuvinte, mulţimea *A* este o ε - reţea pentru mulţimea *M*, dacă orice element *x* din *M* poate fi aproximat cu elemente din *A* cu precizie de ε> 0 .

**Definiţia 2.** Se spune că mulţimea *M* ⊂ *X* este total mărginită, dacă pentru orice ε > 0 există un număr finit de puncte *x*1, *x*2, …, *xn* din *M,* astfel încît

Se vede uşor că este adevărată :

**Teorema** **1.** Mulţimea *M* ⊂ *X* este total mărginită, dacă şi numai dacă pentru orice ε > 0 există o ε - reţea finită pentru această mulţime.

**Demonstraţie.** *Necesitatea*. Fie mulţimea *M* total mărginită şi ε > 0. Avem

şi deci pentru orice *x* ∈ *M* există o sferă care conţine *x*. De aici şi, prin urmare, mulţimea este o ε - reţea finită pentru mulţimea *M*.

*Suficienţa.* Fie că pentru orice ε > 0 există o ε - reţea finită pentru mulţimea *M*. Notăm această ε-reţea prin **.** Deci pentru orice *x* ∈ *M* există *xj* ∈ *A* astfel încît , ceea ce implică

De aici

adică *M* este total mărginită.

**Teorema 2.** (Hausdorff). Pentru ca mulţimea *M* din spaţiul metric *X* să fie relativ compactă este necesar, iar dacă spaţiul *X* este complet, atunci şi suficient, ca *M* să fie total mărginită.

**Demonstraţie.** *Necesitatea*. Fie mulţimea *M* relativ compactă şi ε > 0. Luăm un *x*1 ∈ *M*. Dacă , atunci există *x*2 ∈ *M, x*2 ∉ şi deci

Dacă

atunci există

*x*3 ∈ *M*  şi deci Prelungim acest proces de extragere din mulţimea *M* a elementelor *xk*. Fie că putem extrage o mulţime infinită de astfel de elemente diferite . Atunci

(1)

Mulţimea *M* fiind relativ compactă , există un subşir convergent şi deci fundamental. Prin urmare, pentru orice ε >0 există ∈ *N,* astfel încît ceea ce este în contradicţie cu inegalitatea (1). De aici rezultă, că există un sistem finit cu proprietatea

*Suficienţa.* Fie spaţiul *X* complet şi mulţimea *M* ⊂ *X* total mărginită, iar ⊂ *M*. Să luăm un şir de numeric ε*n*> 0; ε*n* → 0. Mulţimea *M* fiind total mărginită, avem

şi deci măcar una din aceste sfere conţine un subşir al şirului . Notăm acest subşir prin . Deoarece *M* este total mărginită, există astfel încît

şi deci măcar una din sferele conţine un subşir al şirului Notăm acest subşir prin . Prelungim acest proces la nesfîrşit şi obţinem şirurile (*i* = l, 2, ...) cu proprietăţile:

1. Fiecare şir este un subşir al şirului ;

Formăm şirul „diagonal" , adică primul element din primul şir, al doilea element din al doilea şir ş.a.m.d. Să arătăm că acest şir este fundamental. Fie ε > 0. Deoarece şi (*k* ∈ *N*) sînt elemente din şirul , rezultă că şi deci (*k* ∈ *N*).

Întrucît

rezultă că există *i*0 ∈ *N* astfel încît şi deci pentru orice şi orice *k* ∈ *N* avem **.** Prin urmare, şirul este fundamental. Spaţiul *X* fiind complet, rezultă că este convergent. Ne-a mai rămas să observăm , că este un subşir al şirului **.**

*Consecinţa 1.*Pentru ca mulţimea *M* din spaţiul metric complet *X* să fie relativ compactă, este suficient ca pentru orice ε > 0 să existe o ε - reţea relativ compactă a mulţimii *M*.

Fie ε > 0 şi B - o – reţea relativ compactă a mulţimii *M*. Pentru orice ∈ *M* există *y* ∈ *B* cu Din teorema Hausdorff există o - reţea finită *A* pentru mulţimea *B* şi deci există *z* ∈*A* astfel încît . Avem

Prin urmare mulţimea *A* formează o ε - reţea finită pentru mulţimea *M*. Din teoremele 1 şi 2 rezultă ca *M* este relativ compactă.

*Consecinţa 2.* Orice spaţiu metric compact *X* este separabil. Fie ε*n* > 0, ε*n* → 0. Din teorema Hausdoff rezultă existenţa elementelor astfel încît

Notăm

Mulţimea *A* este cel mult numărabilă (ca reuniunea unei mulţimi numărabile de mulţimi finite). Ea este şi peste tot densă. Într-adevăr, fie *x* ∈ *X*, ε > 0. Alegem şi deoarece

avem: există o sferă ce conține *x* , deci Prin urmare și deci *A* este peste tot densă.

**§ 17. Criteriul de compacitate în spaţiul *C*[*a*, *b*]**

**Definiţia** **1.** Funcţiile mulţimii *M* ⊂ *C*[*a*, *b*] se numesc egal continue (sau echicontinue), dacă pentru orice număr ε > 0 există un număr δ > 0 astfel încît relaţiile *t*′**,***t*′′ ∈ [*a*, *b*], |*t′* - *t*′′| < δ implică | *x*(*t*′) - *x*(*t*′′) | < ε oricare ar fi funcţia *x* ∈ *M*.

Exemple . 1. Dacă mulţimea *M* ⊂ *C*[*a*, *b*] este finită, atunci funcţiile acestei mulţimi sînt egal continue. Într-adevăr, fie şi ε > 0. Conform teoremei Cantor fiecare din funcţiile este uniform continuă pe [*a*, *b*] şi deci există δ*j* > 0, astfel încît *t*′**,***t*′′ ∈ [*a*, *b*], |*t′* - *t*′′| < δj implică | (*t*′) - (*t*′′) | < ε. Se vede uşor că

satisface condiţiei din definiţia mulţimii de funcţii egal continue.

2. Fără dificultate se constată că funcţiile mulţimii  *t*′′= , ε=).

**Definiţia 2.** Mulţimea *M* ⊂ numeşte uniform mărginită, dacă există o constantă α , astfel încît pentru orice *x* ∈ *M* şi orice *t* ∈ [*a*, *b*] avem | *x*(*t*) | ≤ α.

**Teorema Arzelà-Ascoli.** Mulţimea *M* ⊂ este relativ compactă, dacă şi numai dacă ea este uniform mărginită şi funcţiile acestei mulţimi sînt egal continue.

**Demonstraţie.** *Necesitatea*. Fie *M* ⊂ o mulţime relativ compactă şi deci mărginită în spaţiul metric adică există α > 0 astfel încît ρ(*x*, 0) ≤ α (*x* ∈ *M*) . De aici | *x*(*t*) | ≤ α (*t* ∈ [*a*, *b*], *x* ∈ *M*) , adică mulţimea *M* estmărginităuniform*.* Să demonstrăm că funcţiile mulţimii *M* sînt egal continue. Fie ε > 0 şi ⊂ M o - reţea finită a mulţimii *M* (existenţa unei astfel de reţea rezultă din teorema Hausdorff). Conform exemplului l, funcţiile ⊂ M sînt egal continue şi deci există δ > 0 astfel încît implică Pentru orice *x* ∈ *M* există *xk* (1 ≤ *k* ≤ *m*) cu , adică . Pentru avem

Aşadar, dacă mulţimea *M* este relativ compactă, atunci ea este uniform mărginită şi funcţiile acestei mulţimi sunt egal continue.

*Suficienţa*. Fie *M* ⊂ o mulţime uniform mărginită, adică

funcţiile căreia sunt egal continue.

Considerăm un şir arbitrar ⊂ *M*. Notăm prin o mulţime densă în [*a, b*] (de exemplu, Q ∩ [*a, b*]). În virtutea inegalităţii (1), şirul numeric este mărginit şi deci conţine un subşir convergent .

Considerăm acum subşirul al şirului **.** Din (1) avem că şirul este mărginit şi deci conţine un subşir .

Continuăm acest proces la nesfîrşit şi obţinem şirurile (*k* = l, 2, ...) cu proprietăţile:

1. este un subşir al şirului ;
2. şirul numeric este convergent.

Formăm şirul „diagonal" . Din a) şi b) rezultă că şirul numeric este convergent pentru orice *j* ∈ *N* . Funcţiile mulţimii *M* fiind egal continue , pentru orice ε > 0 există un număr δ > 0, astfel încît oricare ar fi şi *x* ∈ *M*. Avînd numărul δ > 0, alegem o submulţime finită a şirului astfel ca pentru orice *t* ∈ [*a*, *b*] să existe . Şirul este convergent în orice punct şi deci există *n*0 ∈ *N* astfel încît

Pentru avem

De aici:

adică şirul este fundamental în *C*[*a, b*] şi, deci convergent.

**§ 18. Acoperiri. Teorema Borel**

**Definiţie.** Fie *X* un spaţiu metric şi *M* o mulţime din *X*. Se numeşte acoperire a mulţimii *M* orice familie de submultimi ale lui *X* , aşa ca

Dacă Г este o mulţime finită, se zice că acoperirea este finită. O acoperire formată din mulţimi deschise , pe scurt, se numeşte acoperire deschisă.

**Teorema Borel.** O mulţime închisă *F* din spaţiul metric *X* este compactă, dacă şi numai dacă din orice acoperire deschisă a ei se poate extrage o subacoperire finită.

**Demonstraţie.** *Necesitatea*. Fie *F* o mulţime compactă şi o acoperire deschisă oarecare a mulţimii *F*. Admitem că această acoperire nu conţine o subacoperire finită şi fie un şirconvergent la zero. Conform teoremei Hausdorff , mulţimea *F* este total mărginită şi deci există astfel încît

Evident, mulţimile (*i* = l, …, *m*) sînt compacte, diam ≤ 2 şi

Mulţimea *M*, după cum am presupus, nu poate fi acoperită cu un număr finit de mulţimi . Prin urmare măcar una din mulţimile (*i* = l, 2, ...) posedă aceeaşi proprietate. Fie această mulţime . Repetăm acelaşi raţionament cu mulţimea compactă şi numărul ε2 > 0 şi obţinem mulţimea compactă , astfel încît *diam* ≤ 2ε2 şi ea nu poate fi acoperită cu un număr finit de mulţimi din familia . Prelungim acest proces la nesfirşit şi obţinem şirul de mulţimi compacte cu proprietăţile: a) ; c) fiecare din mulţimile in nu poate fi acoperită cu un număr finit de mulţimi din familia .

Din a), conform teoremei 3, §15, rezultă existenţa unui punct (*n* = l, 2, ...). Întrucît , există γ0,  astfel încît . Mulţimea este deschisă şi prin urmare în ea se conţine o sferă . Alegem astfel ca . Atunci din b) avem: *diam*  2 ε. Întrucît şi diametrul acestei mulţimi este mai mic decît ε , rezultă că . Sfera se include în şi deci . Prin urmare, mulţimea este acoperită cu o singură mulţime din familia . Aceasta însă contrazice condiţiei c). Aşadar, presupunerea este falsă şi deci familia conţine o subacoperire finită a mulţimii *F*.

*Suficienţa*. Fie *F* o mulţime închisă ce posedă proprietatea : orice acoperire deschisă a mulţimii *F* conţine o subacoperire finită. Vom demonstra că *F* este compactă. Fie un şir arbitrar din *F*. Considerăm 2 cazuri:

1. şirul conţine un subşir constant **,** = *x*  (*k* = l, 2, ...). În acest caz avem subşirul convergent
2. şirul nu conţine un subşir constant. În acest caz el conţine o infinitate de elemente diferite. Fie subşirul elementelor diferite (două cîte două) ale şirului . Admitem că nu conţine nici un subşir convergent. Atunci orice *z* ∈ *F* nu este limită a unui subşir al şirului şi, prin urmare, există o sferă *S*(*z*, ε*z*), care nu conţine nici un punct din şirul cu excepţia poate a punctului *z* (deci conţine cel mult un element al şirului ). Este evident însă că

,

adică mulţimeaformează o acoperire deschisă a mulţimii şi, prin ipoteză există o subacoperire finită. Deci există, astfel încît . De aici avem : şi , prin urmare, cel puţin una din sferele conţine o infinitate de elemente ale şirului Aceasta însă contrazice alegerii sferelor *S*(*z*, ε*z*) şi deci şirul conţine cel puţin un subşir convergent. Şirul fiind un subşir al şirului, rezultă că conţine un subşir convergent şi, prin urmare, mulţimea este compactă.

**§ 19. Funcţii continue pe mulţimi compacte**

Fie *X* şi *Y* două spaţii metrice şi *f*: *X* → *Y* o funcţie definită în *X* cu valori în *Y.*

**Definiţia 1.** (Cauchy). Funcţia *f* : *X* → *Y* se numeşte continuă în punctul dacă pentru orice ε > 0 există δ > 0, astfel încît implică .

**Definiţia 2.** (Heine). Funcţia *f* : *X* → *Y* se numeşte continuă în punctul dacă pentru orice şir de puncte din X, convergent la , şirul imagine este convergent la .

Aceste două definiţii ale continuităţii unei funcţii într-un punct sînt echivalente. Echivalenţa se stabileşte în mod analog celei din analiza matematică referitor la funcţii numerice de argument numeric.

De obicei se zice, că funcţia *f* este continuă pe mulţimea *M* ⊂ *X*, dacă ea este continuă în orice punct al acestei mulţimi.

În viitor prin *f*(*M*) vom nota imaginea mulţimii *M* prin aplicaţia *f* , adică *f*(*M*) = {*y* ∈ *Y*: ∃*x* ∈ *M*, *f*(*x*) = *y*}.

Pentru funcţiile continue pe mulţimi compacte sînt adevărate un şir de teoreme similare teoremelor Bolsano-Weierstrass şi Cantor, cunoscute din cursul de analiză matematică.

**Teorema 1.** Imaginea unei mulţimi compacte printr-o aplicaţie continuă este o mulţime compactă.

**Demonstraţie.** Fie mulţimea *M* *X* compactă, *f* : *X* → *Y* o funcţie continuă pe *M*. Vom demonstra că *f*(*M*) este de asemenea compactă. Fie un şir arbitrar din *f*(*M*). Întrucît ⊂ *f*(*M*) , există astfel încît *f*(*xn*) = *yn*. Prin ipoteză, *M* este o mulţime compactă şi deci şirul conţine un subşir ,. Deoarece *f* este continuă pe adică . Întrucît este un subşir al şirului **,** mulţimea *f*(*M*) este compactă.

**Consecinţă.** Imaginea unei mulţimi compacte printr-o aplicaţie continuă este o mulţime mărginită şi închisă.

**Observaţie.** Imaginea unei mulţimi relativ compacte printr-o aplicaţie continuă poate să nu fie relativ compactă. De exemplu, fie *X* = (0, l] şi *f* : *X* → *Y* = *R* definită prin formula . Funcţia *f* este continuă pe mulţimea relativ compactă *X*. Însă imaginea *f*(*X*) = [l, ∞) nu este relativ compactă.

**Teorema 2.** Fie *M* o mulţime compactă din spaţiul metric *X* şi *f* : *M* → *R* o funcţie continuă pe *M*. Atunci:

1. *f* este mărginită pe *M*;
2. dacă

atunci există astfel încît

**Demonstraţie.** Afirmaţia a) rezultă din consecinţă. Să demonstrăm afirmaţia b). Conform definiţiei marginii inferioare, pentru orice număr natural *n* există astfel încît

De aici obţinem că şi deci . Însă mulţimea este închisă şi prin urmare adică există astfel încît . În mod analog se demonstrează existenţa punctului .

**Definiţia 2.** Fie *X* şi *Y* două spaţii metrice oarecare şi *M* ⊂ *X*. Funcţia *f* : *M* → *Y* se numeşte uniform continuă pe mulţimea *M*, dacă pentru orice ε > 0 există un număr δ > 0, astfel încît relaţiile implică .

**Teorema 3.** Orice funcţie continuă pe o mulţime compactă este uniform continuă pe această mulţime.

**Demonstraţie.** Fie *M*  o mulţime compactă în spaţiul metric *X* şi *f* : *M* → *Y* o funcţie continuă pe mulţimea *M*. Admitem că *f* nu este uniform continuă pe *M*. Există atunci ε0 > 0, astfel încît pentru orice δ > 0 există cu proprietăţile , .

Fie δ*n* > 0 (*n* = l, 2, ...) un şir convergent la zero. Pentru orice δ*n* există astfel încît . Şirul conţine un subşir convergent la (mulţimea *M* este compactă !). Din relaţiile

rezultă că Funcţia *f* este continuă pe *M* şi deci

. De aici şi din continuitatea distanţei avem:

,

ceea ce este în contradicție cu inegalitatea

(*k* = l, 2, ...).

Teorema este demonstrată.

**II. SPAȚII LINIARE NORMATE**

**§ 20. Spaţii liniare normate. Definiţii. Exemple**

O bună parte din materia acestui paragraf în principiu este cunoscută din cadrul algebrei liniare, precum şi din cadrul analizei matematice. Noi, însă, avînd în vedere importanţa acestei materii pentru studiul de mai departe al analizei funcţionale, în mod conştient am găsit de cuviinţă să amintim şi pe alocuri întru-cîtva să completăm aici unele noţiuni deja cunoscute.

Vom nota prin *K* cîmpul numerelor reale *R* sau ale celor complexe *C*.

**Definiţia** **1.** Se numeşte spaţiu liniar (sau spaţiu vectorial) peste cîmpul *K* o mulţime *E* de elemente, în care sînt definite două operaţii , şi anume, o operaţie de adunare *x* + *y* a elementelor din *E* (adică o aplicaţie a mulţimii *E* × *E* în *E*) şi o operaţie α*x* de înmulţire cu numere α ∈ *K* a elementelor *x* ∈ *E* (adică o aplicaţie a mulţimii *K* × *E* în *E*), care pentru orice *x*, *y*, z∈ *E* şi α, β ∈ *K* satisfac condiţiile:

1. *x* + *y* = *y* + *x*;
2. *x* + (*y* + *z*) = (*x* + *y*) + *z*;
3. există un element 0 ∈ *E* (numit element nul) astfel încît *x* + 0 = *x* oricare ar fi *x* ∈ *E*;
4. pentru orice element *x* ∈ *E* există un element (*x*) ∈ *E,* astfel încît *x* + (*x*) = 0;
5. 1⋅*x* = *x*;
6. α(β*x*) = (αβ)*x*;
7. (α + β)*x* = α*x* + β*x*;
8. α(*x* + *y*) = α*x* + α*y*.

Aceste condiţii se numesc axiome ale spaţiului liniar. În cazul , cînd *K* = *R* spaţiul *E* se numeşte spaţiu liniar real, iar în cazul *K* = *C E* se numeşte spaţiu liniar complex. Elementele spaţiului liniar se numesc vectori.

Proprietăţile l)-8) implică următoarele:

1. elementul 0 din proprietatea 3) este unic;
2. elementul (*x*) din proprietatea 4) este unic;
3. 0⋅*x* = 0 pentru orice *x* ∈ *E*;
4. (l)*x* = *x* pentru orice *x* ∈ *E*;
5. α⋅0 = 0 pentru orice α ∈ *K*.

Exemple.

1. Mulţimea *Rm* a sistemelor de m numere reale cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari definite prin formulele:

formează un spaţiu liniar (real). Cele 8 condiţii din definiţia spaţiului liniar se verifică nemijlocit.

2. În *Cm* operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari din cîmpul *K* = *C* se definesc ca şi în *Rm* , adică

Cu aceste operaţii *Cm* este un spaţiu liniar (complex).

3. Fie *E* = *lp* (*l* *p* < ∞) sau *l∞*  sau *c*0 (vezi definiţiile mulţimilor *lp* (*l* *p* < ∞), *l∞*  , *c*0 în §l , 3 ). Dacă vom pune

Cu aceste operaţii mulţimile *lp* (*l* *p* < ∞), *l∞*  şi *c*0 se organizează ca spaţii liniare.

4. Mulţimea *C*[*a*, *b*] a funcţiilor continue pe segmentul [*a*, *b*] cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalarii din cîmpul *K=R ,* definite prin formulele (*x* *+* *y*)(*t*) = *x*(*t*) + *y*(*t*), (α*x*)(*t*) α*x*(*t*), formează un spaţiu liniar.

**Definiţia 2.** Sistemul de vectori din spatiul liniar *E* se zice că este liniar independent, dacă

atunci şi numai atunci, cînd (*j* = l, 2, ..., *m*).

În caz contrar sistemul se numeşte liniar dependent. Se zice că sistemul este liniar independent, dacă orice subsistem finit al acestui sistem este liniar independent.

**Definiţia 3.** Dacă în spaţiul liniar *E* există *m* (*m* ∈ *N*) vectori liniar independenţi şi oricare *m* + 1 vectori sînt liniar dependenţi, atunci se spune că *E* este spaţiu liniar m- dimensional şi se scrie *dim* *E* = *m*.

**Definiţia 4.** Dacă în spaţiul liniar *E* pentru orice *m* ∈ *N* există *m* vectori liniar independenţi, atunci se spune că *E* este un spaţiu liniar infinit dimensional şi se scrie *dim E* = ∞.

Se vede uşor, că spaţiile *Rm* şi *Cm* sînt finit dimensionale: *dim Rm* = *m* = *dim Cm*, iar spaţiile *lp* (*l* *p* ∞), *c*0 şi *C*[*a*, *b*] infinit dimensionale. În spaţiile *lp* şi *c*0 liniar independent este sistemul : )

iar în *C*[*a*, *b*] – sistemul

Dacă ∈ *E*, αj ∈ *K* (*j* = l, 2, …, *m*) , atunci elementul

se numeşte combinaţie liniară de elemente *xj .*

**Definiţia 5.** Fie *E* un spaţiu liniar. Sistemul se numeşte bază a acestui spaţiu, dacă orice *x* ∈ *E* poate fi reprezentat sub formă de combinaţie liniară a vectorilor *xj*

şi această reprezentare este unică.

Dacă spaţiul liniar este finit dimensional şi *dim E* = *m*, atunci, evident , orice sistem liniar independent din *m* vectori formează o bază. Orice bază a acestui spaţiu este formată din *m* vectori.

**Definiţia** **6. S**e zice că în spaţiul liniar *E* este definită o normă, dacă fiecărui vector *x* ∈ *E* îi este pus în corespondenţă un număr real asfel încît sînt satisfăcute condiţiile (axiomele normei):

1. , dacă şi numai dacă *x* = 0;
2. (*x* ∈ *E*, α ∈ *K*);
3. (*x, y* ∈ *E*) (inegalitatea triunghiului).

Un spaţiu liniar *E*, în care este definită o normă, se numeşte spaţiu liniar normat, sau mai simplu , spaţiu normat si se noteza .

Un spaţiu normat devine spaţiu metric, dacă definim distanţa dintre două elemente prin formula .

Faptul că formula aceasta defineşte o distanţă se verifică în mod direct. De aici rezultă, că spaţiul normat este un caz particular al spaţiului metric şi, prin urmare, în acest spaţiu au sens toate definiţiile şi sînt adevărate toate propoziţiile demonstrate pentru spaţiile metrice. În particular, în spaţiul normat sfera cu centrul în *x*0 şi de rază *r*> 0 este mulţimea

iar sfera închisă mulţimea

Şirul ⊂ se zice convergent către *x*, dacă

sau echivalent: pentru orice ε > 0 există *n*0 ∈ *N* , astfel încît (*n* ≥ *n*0). Se scrie

sau

Convergenţa definită astfel se numeşte convergenţă în normă.

Şirul ⊂ se numeşte şir fundamental, dacă pentru orice ε > 0 există *n*0 ∈ *N* , astfel încît (*n, m* ≥ *n*0).

Dacă un spaţiu liniar normat este complet în sensul convergenţei în normă, atunci el se numeşte spaţiu Banach. Cu alte cuvinte, spaţiul liniar normat în care orice şir fundamental este convergent se numeşte spaţiu Banach. Spaţiul Banach se va nota de obicei prin *.*

**Exemple:**

1. Spaţiul liniar *Rm* (respectiv *Cm*) este un spaţiu normat cu norma

Axiomele normei l)2) se verifică direct, iar axioma 3) rezultă imediat din inegalitatea Minkowski (§2). Conform §8, spaţiul Rm (respectiv Cm) este spaţiu Banach.

2. Spaţiul liniar *lp*(*l* *p* < ∞) cu norma

este un spaţiu normat. Aici iarăşi inegalitatea triunghiului coincide cu inegalitatea Minkowski pentru serii. Acest spaţiu este complet şi deci *lp*(*l* *p* < ∞) este un spaţiu Banach.

3. Spaţiul liniar *l*∞ este un spaţiu Banach cu norma

Axiomele normei se verifică în mod direct; pe cît priveşte completitudinea spaţiului *l*∞ , menţionăm că ea a fost stabilită în §8.

1. Spaţiul liniar *c*0 este un spaţiu Banach cu norma
2. Spaţiul *C*[*a*, *b*] este un spaţiu Banach cu norma
3. Spaţiul *Cp*[*a*, *b*] (*l* *p* < ∞) este un spaţiu liniar normat cu norma

Axioma a treia a normei coincide cu inegalitatea Minkowski stabilită în §2 pentru funcţiile continue pe [*a*, *b*] , axioma a doua este evidentă. Pentru a demonstra că este satisfăcută şi prima axiomă a normei este necesară următoarea:

**Lemă.** Fie ϕ o funcţie nenegativă şi continuă pe [*a, b*] . Dacă

atunci

Demonstraţia acestei leme se bazează pe proprietăţile funcţiilor continue, precum şi a integralelor definite şi e lăsată pe seama cititorului.

Conform §8 , spaţiul normat *Cp*[*a*, *b*] nu este complet şi deci nu este spaţiu Banach.

În continuare menţionăm doar cîteva proprietăţi dintre cele mai simple ale normei, precum şi ale convergenţei într-un spaţiu normat.

Fie un spaţiu normat oarecare. Avem

1. pentru orice *x* ∈ .

Într-adevăr .

Într-adevăr,

Într-adevăr, + =

Utilizînd metoda inducţiei matematice, obţinem

(1)

Avem

(2)

Schimbînd cu locurile *x* şi *y*,obţinem

(3)

Din (2) şi (3) rezultă (1).

5. Norma în orice spaţiu normat este o funcţie continuă, adică *xn* → implică

Această afirmaţie rezultă imediat din inegalitatea│ care se obţine nemijlocit din inegalitatea (1) pentru *x* = *xn* şi *y* = *x*.

1. Operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari într-un spaţiu normat sînt continue , adică dacă

atunci

Într-adevăr,

şi

(4)

Şirul numeric fiind convergent, este mărginit şi deci există *c* astfel încăît (*n* ∈ *N*). Din (4) avem

Conform definiţiei, o mulţime este mărginită în spaţiul metric, dacă ea se conţine într-o sferă. În cazul unui spaţiu normat drept centrul sferei e comod să se ia vectorul 0 şi obţinem : mulţimea *M*  din spaţiul normat este mărginită în acest spaţiu, dacă există un număr α, astfel încît α (

De aici şi din 5 rezultă

7. Orice şir convergent este mărginit.

**§ 21. Subspaţii. Sume directe de subspaţii**

**Definiţia** **1.** Fie un spaţiu liniar normat. Mulţimea ⊂ se numeşte varietate liniară, dacă pentru orice *x*, *y* ∈ , α ∈ *K* elementele *x* + *y* ∈ , α*x* ∈ *.* Varietatea liniară închisă se numeşte subspaţiu al spaţiului normat .

Mulţimea a tuturor polinoamelor formează, evident, o varietate liniară în *C*[*a*, *b*]. Însă = *C*[*a*, *b*] (a se vedea §6) şi deci ≠ ,adică nu este subspaţiu. Mulţimea *M* = {*x* ∈ *C*[*a*, *b*]: *x*(*a*) = *x*(*b*) = 0} formează un subspaţiu al spaţiului *C*[*a*, *b*].

Dacă *M* ⊂ , atunci mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de elemente din *M* formează o varietate liniară ce se notează de obicei prin (*M*)*.* Aşadar

Se vede uşor că reprezintă cea mai mică (în raport cu operaţia de incluziune) varietate liniară ce conţine mulţimea *M*. Ea se numeşte varietate liniară generată de mulţimea *M*, sau acoperire liniară a mulţimii *M,* sau înveliş liniar al mulţimii *M.*

Uşor se demonstrează că închiderea oricărei varietăţi liniare este o varietate liniară închisă, adică un subspaţiu. Subspaţiul se zice că este subspaţiu generat de mulţimea *M*. este cel mai mic subspaţiu (în raport cu operaţia de incluziune) ce conţine mulţimea *M*.

**Definiţia 2.** Se spune că sistemul de vectori *M* ⊂ este complet în spaţiul , dacă = .

Deoarece mulţimea tuturor polinoamelor este densă în *C*[*a*, *b*], rezultă că sistemul este complet în spaţiul *C*[*a*, *b*].

**Definiţia 3.** Fie şi - două subspaţii ale spaţiului liniar normat . Se zice că spaţiul este suma directă a subspaţiilor şi şi se scrie = , dacă orice element *x* ∈ poate fi reprezentat sub forma

*x* = *y* + *z* ( *z* ∈ ) (1)

şi această reprezentare este unică.

Unicitatea reprezentării (1) este echivalentă afirmaţiei că . Într-adevăr, fie şi *x* = *y* + *z, x* = *y*1 + *z*1 ( *z, z*1 ∈ **)**. Avem şi deci adică . Prin urmare, reprezentarea (1) este unică.

Fie acum şi . Dacă *x* = *y* + *z*  ( *z*∈ atunci avem, de asemenea, *x* = (*y+u)* +(*z-u)*  ( *z-u* ∈ ). Prin urmare, dacă atunci reprezentarea (1) nu este unică.

**Exemplu.** Fie  *lp*(*l* *p* < ∞) ,

=

Se vede uşor că şi sint subspaţii ale spaţiului *lp* şi . Întrucît orice poate fi reprezentat sub forma *x* = *y* + *z ,*  unde =

**=**(ξ1,0, ξ3, …, ξ2n-1,…) şi(0, ξ2, 0, ξ4 ,…, 0, ξ2n,…) ∈ , rezulta ca spaţiul *lp* este suma directă a subspaţiilor şi

**§ 22. Serii în spaţii normate**

**Definiţia 1.** Se spune că seria definită de un şir de elemente ale spaţiului normat este convergentă în şi are drept sumă elementul *s*, dacă şirul ale sumelor parţiale

converge către . În acest caz se scrie

Dacă şirul nu este convergent, se spune că seria

(1)

este divergentă.

Din egalitatea *xn* = *sn* – *sn*-1 (*n* = 2, 3, ...) urmează că termenul general al unei serii convergente tinde la zero.

În teoria seriilor numerice un rol important îi revine criteriului Cauchy de convergenţă. Un asemenea criteriu este adevărat şi în spaţiile Banach.

**Teorema 1.** Pentru ca seria (1) să fie convergentă în spaţiul Banach ,este necesar şi suficient să existe, pentru fiecare număr real ε > 0, un număr natural *n*0 , astfel încît

(2)

oricare ar fi *n* ≥ *n*0 (*n* ∈ *N*) şi *p* ∈ *N*.

**Demonstraţie.** Conform definiţiei, seria (1) este convergentă, dacă şi numai dacă este convergent şirul sumelor parţiale . Spaţiul fiind complet, şirul este convergent, dacă şi numai dacă el este fundamental, adică pentru orice ε > 0 există *n*0 ∈ *N* ,astfel încît

**Observaţie.** Se vede uşor că necesitatea condiţiei (2) pentru convergenţa seriei (1) este adevărată în orice spaţiu normat (nu neapărat complet). Dacă spaţiul normat nu este complet, atunci fără dificultate se poate construi o serie ce satisface condiţia (2), dar care însă este divergentă.

**Definiţia 2.** Seria (1) se numeşte absolut convergentă dacă este convergentă seria numerică

(3)

**Teorema 2.** Spaţiul liniar normat este complet, dacă şi numai dacă în acest spaţiu orice serie absolut convergentă este convergentă.

**Demonstraţie. Necesitatea**. Fie un spaţiu Banach şi seria

absolut convergentă, adică converge seria (3). Conform criteriului Cauchy pentru seriile numerice avem: pentru orice ε > 0 există *n*0 ∈ *N*, astfel încît

.

De aici obţinem

,

ceea ce, în virtutea teoremei 1, implică convergenţa seriei (1).

**Suficienţa.** Fie un spaţiu liniar normat în care orice serie absolut convergentă este convergentă. Vom demonstra că este complet. Fie un șir fundamental în Conform consecinţei din teorema 2 **§**7, din putem extrage un subșir astfel încît seria

este convergentă. Prin urmare , seria

este absolut convergentă. Conform ipotezei ultima serie este convergentă și deci este convergent șirul sumelor parțiale ale ei. Însă

Astfel am obținut, că șirul fundamental conține un subșir convergent, ceea ce conform teoremei 3 **§**7 arată, că șirul este convergent. Prin urmare , orice șir fundamental în este convergentsi şi deci spațiul este complet.

**§ 23. Spaţii Banach cu bază**

**Definiţie.** Fie un spaţiu Banach infinit dimensional. Se zice că şirul este o bază (sau baza Schauder) a acestui spaţiu, dacă orice element *x* ∈ poate fi reprezentat sub forma

(1)

şi această reprezentare este unică.

Se vede uşor că unicitatea reprezentării oricărui *x* ∈ sub forma (1) este echivalentă afirmaţiei:

dacă şi numai dacă = 0 (*j* ∈ *N*). De aici, în particular, rezultă că *xn* ≠ 0 (*n* ∈ *N*).

**Exemple.** Fie = *lp* (*l* ≤ p< ∞) şi Pentru orice seria

converge şi deci restul acestei serii

De aici rezultă că

şi deci

Dacă

atunci de unde (*j* ∈ *N*). Prin urmare, şirul formează o bază a spaţiului *lp* (*l ≤ p* < ∞). În mod analog se stabileşte că acelaşi sistem formează o bază a spaţiului *c*0.

**Teoremă.** Orice spaţiu Banach cu bază este separabil.

**Demonstraţie.** Vom considera cazul spaţiului real. Fie o bază a spaţiului ,iar *M* –mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de elemente cu coeficienţi raţionali.Vom demonstra că *M* este o mulţime numărabilă şi peste tot densă în ,ceea ce implică separabilitatea spaţiului *.* Pentru orice *n* ∈ *N* notăm prin *Mn* mulţimile combinaţiilor liniare de elemente cu coeficienţi raţionali, adică

Evident, aplicația

este o bijecție a mulțimii *Mn* pe mulţimea a sistemelor din *n* numere raţionale. Întrucît este numărabilă, numărabilă va fi şi mulţimea *Mn*. Însă

şi deci *M* este de asemenea numărabilă.

Fie *x* ∈ ,

Pentru orice ε > 0 alegem *n*0 ∈ *N* astfel ca

(2)

Avînd numărul , alegem numerele *rj* ∈ *Q* (*j* = l, 2, ..., ) astfel ca

Considerăm vectorul

Evident , *y* ∈ *M*. Din (2) (3) avem

= = + = ε . Prin urmare, mulţimea  *M* este peste tot densă. Fiind şi numarabila, spatiul este separabil.

Din acastă teoremă rezultă , că orice spaţiu Banach neseparabil ( în particular, *l*∞ ) nu admite o bază Schauder *.*

Afirmaţia reciprocă teoremei , demonstrate mai sus, nu este adevărată. În anul 1972, P.Enflo a arătat că există spaţii Banach separabile care nu admit bază Schauder.

**§ 24. Spaţii cît**

Fie *E* un spaţiu liniar peste cîmpul *K* şi o varietate liniară în *E*. Vom defini în mulţimea *E* următoarea relaţie: *x* ~ *y* dacă *x* – *y* ∈ . Se verifică uşor că relaţia ~ posedă proprietăţile:

1. *x ~ x*, adică relaţia ~ este reflexivă;
2. *x ~ y* implică *y ~ x*, adică relaţia ~ este simetrică;
3. *x ~ y*, *y ~ z* implică *x ~ z*, adică relaţia ~ este tranzitivă.

Prin urmare relaţia ~ este o relaţie de echivalentă şi deci spaţiul *E* se descompune în clase de echivalenţă în modul următor: două elemente *x* şi *x*1 aparţin aceleiaşi clase, dacă şi numai dacă *x ~ x*1, adică *x* – *x*1 ∈*.* Vom nota prin clasa de echivalenţă care conţine elementul *x*. Se vede uşor că, dacă *x* este un element din atunci

Se scrie

Două clase de echivalenţă sau sînt disjuncte, sau coincid. În adevăr, dacă *u* ∈ *u* ∈ , atunci

şi deci . Să observam că dacă *x* ~ *x*1, *y* ~ *y*1, atunci *x* + y ~ *x*1 + *y*1, λ*x* ~ λ*x*1 (λ ∈ *K*). Într-adevăr:

(*x* + y) – (*x*1 + *y*1) = (*x* –*x*1) + (*y* –*y*1) ∈ λ*x* – λ*x*1 = λ(*x* –*x*1) ∈ .

Prin urmare *x ~ x*1, *y* ~ *y*1 implică

Acest fapt ne permite să introducem în mulţimea claselor de echivalenţă operaţiile de adunare şi de înmulţire cu un număr în mod natural :

(2)

Relaţiile (1) arată că definiţia adunării şi înmulţirii cu un număr din *K* prin egalităţile (2) este corectă, deoarece clasele nu depind de alegerea elementelor.

Se verifică fără dificultate, că mulţimea claselor de echivalenţă cu operaţiile de adunare şi înmulţire definite de relaţiile (2), formează un spaţiu liniar, numit spaţiu cît al lui *E* prin sau spaţiu cît al lui *E* relativ laşi se notează *E* │*.* Rolul elementului nul în acest spaţiu îl joacă clasa ce conţine elementul  *E:*

iar Într-adevăr,

Dacă spaţiul *E* este normat, atunci în spaţiul cît poate fi definită o normă.

Este adevărată

**Teorema** **1.** Fie un spaţiu liniar normat, un subspaţiu al lui .Formula

defineşte o normă în │*.*

**Demonstraţie.** Să observăm că mulţimea este închisă în . Într-adevăr, dacă atunci

şi deci , de unde rezultă **.**

Să verificăm axiomele normei.

l) Dacă , atunci

Reciproc, fie Conform definiţiei marginii inferioare, există , astfel încît (*n* = l, 2, ...) şi deci . Însă atunci ceea ce implică

1. Fie ∈ *E* │ şi ε > 0. Alegem astfel încît Avem

Numărul ε > 0 fiind arbitrar, obţinem

**Teorema 2.** Dacă este spaţiu Banach şi un subspaţiu al spaţiului , atunci, este spaţiu Banach.

**Demonstraţie.** Fie un şir fundamental în . Conform consecinţei din teorema 2 §7, şirul conţine un subşir astfel încît

Fie un element arbitrar din . Alegem astfel ca

apoi astfel ca

Prelungim acest proces la nesfîrşit şi obţinem şirul ∈ , ce satisface condiţia : Avem

+++∞.

Prin urmare, seria

+) (3)

este absolut convergentă. Întrucît spaţiul este complet, seria (3) este convergentă. Fie suma seriei (3) egală cu Sumele parţiale +) =. Deci Însă atunci = =

.

Prin urmare , şirul fundamental conţine un subşir convergentConform teoremei 3, **§7** şirul este convergent. Cu aceasta, completitudinea spaţiului cît este demonstrată.

**25. Izomorfismul spaţiilor normate finit dimensionale**

**Definiţia 1.** Fie 1 şi 2 două spaţii liniare normate peste acelaşi cîmp *K*. Se zice că aceste spaţii sînt izomorfe, dacă există o aplicaţie bijectivă *f*  a spaţiului 1 pe 2 , astfel încît:

l) *f*  este liniară, adică păstrează operaţiile algebrice : pentru orice *x*, *y* ∈, α ∈ *K* avem *f*(*x*+ *y*) = *f*(*x*) + *f*(*y*), *f*(α*x*) = α*f*(*x*);

2) aplicaţiile *f* şi *f* -1 sînt continue.

**Teoremă.** Orice spaţiu liniar normat real (complex) finit dimensional de dimensiunea *m* este izomorf cu spaţiul *Rm*(*Cm*).

**Demonstraţie.** Fie un spaţiu liniar normat real, *dim* = *m*. Fixăm o bază a spaţiului . Atunci fiecare *x* ∈ admite o reprezentare unică

Considerăm aplicaţia *f* : → *Rm* definită astfel:

adică dacă, atunci

*f*(*x*) = , (1)

unde *Rm.*

Evident, *f* este o bijecţie a spaţiului pe tot spaţiul *Rm*. Ea este liniară, deoarece dacă

atunci

*f*(*x* + *y*) = = *f*(*x*) + *f*(*y*) , *f*(*x*) = = .

Vom demonstra acum, că aplicaţiile *f Rm*→ , sînt continue. Pentru orice *x* ∈ avem

, adică

(2)

unde

De aici, în particular,

(3)

ceea ce implică continuitatea aplicației

Pe suprafața sferei din spațiul *Rm*

considerăm funcția

Utilizînd inegalitatea (2), obținem

ceea ce implică continuitatea funcţiei ϕ.

Pentru orice avem *x* ≠ 0 şi deci ϕ() > 0. Mulţimea este compactă (teorema 2, §15), funcţia ϕcontinuă pe această mulţime şi deci există , astfel încît

Dacă este un vector arbitrar din *Rm* diferit de vectorul nul, atunci

şi deci == , de unde rezultă

(4)

De aici, în particular,

sau

ceea ce implică continuitatea funcţiei

Cazul spaţiului complex se examinează în mod analog.

**Consecinţa 1**. Orice două spaţii liniare normate reale (complexe) finit dimensionale de aceeaşi dimensiune sînt izomorfe.

Este suficient să observăm că ambele spaţii sînt izomorfe cu *Rm* (*Cm*) şi deci sînt izomorfe între ele.

**Definiţia 2.** Se spune că două norme şi definite pe un spaţiu liniar *E*, sînt echivalente, dacă există două numere reale *c*1, *c*2 > 0 , asfetfel încît oricare ar fi ∈ *E*.

**Consecinţa 2.** Orice două norme, definite pe un spaţiu liniar finit dimensional, sînt echivalente

Într-adevăr, fie şi două norme definite pe spaţiul liniar *E*. Utilizind inegalităţile (2) şi (4), obţinem inegalităţile:

în care (*j* = l, 2) sînt anumite numere pozitive. De aici

**Consecinţa 3.** Convergenţa într-un spaţiu liniar normat finit dimensional este echivalentă cu convergenţa în coordonate.

Într-adevăr, fie – o bază a spaţiului normat , şi (5) avem

De aici rezultă că şirul converge în spaţiul către converge către în spaţiul *Rm* (*Cm*). În spaţiul *Rm* (*Cm*) convergenţa este echivalentă cu convergenţa în coordonate şi deci obţinem

dacă şi numai dacă (*j* = l, 2, ..., *m*).

**Consecinţa 4.** Orice varietate liniară finit dimensională într-un spaţiu normat este închisă şi prin urmare este un subspaţiu.

Fie o varietate liniară în spaţiul normat , *dim* = *m* şi un şir din convergent în către un element oarecare *x*. Vom demonstra că *x* ∈ . Fie o bază în şi

Şirul , fiind convergent, este şi fundamental. Din relaţia (5) avem:

de unde rezultă că este fundamental în *Rm* şi deci convergent. Fie

Punem

Atunci *y* ∈ şi

Avem: *xn* → *y* ∈ şi *xn* → *x*. Deci *x* = *y* ∈ .

**§ 26. Compacitatea şi spaţiile finit dimensionale**

Scopul acestui paragraf este de a demonstra teorema F. Riesz, privind caracterizarea spaţiilor normate finit dimensionale. În demonstraţie vom utiliza următoarea lemă, care în analiza funcţională are şi multe alte aplicaţii.

**Lema Riesz.** Fie un subspaţiu al spaţiului liniar normat , ≠ .Pentru orice ε > 0 există un element ∈ , astfel încît

**Demonstraţie.** Fie *x*∈ \ distanţa de la *x* la adică

*x,.*

Întrucît este o mulţime închisă şi *x* ∉ , numărul . Alegem un element ∈ , astfel ca

(1)

şi notăm

Evident, şi pentru orice *y* ∈ avem

(2)

Elementul şi deci . De aici şi din relaţiile (1) şi (2) rezultă

**Teorema Riesz.** Spaţiul liniar normat este finit dimensional, dacă şi numai dacă orice mulţime mărginită din este relativ compactă.

**Demonstraţie.** Vom considera cazul spaţiului real. Fie un spaţiu normat cu *dim* = *m* < ∞. Considerăm aplicaţia *f* : → *Rm* definită în paragraful precedent prin formula (1). Conform relaţiilor (2) şi (4) ale aceluiaşi paragraf, avem

Fie *M* o mulţime mărginită în şi deci există astfel încît

(4)

Din (3) şi (4) rezultă că

Deci mulţimea *f*(*M*) este mărginită în *Rm* şi prin urmare este relativ compactă (teorema 2, §15).

Dacă este un şir arbitrar din *M*, atunci mulţimea *f*(*M*) fiind relative compactă, şirul conţine un subşir convergent . Fie

Aplicaţia *f* este surjectivă şi deci există *x*∈ astfel încît *f*(*x*) = *y*. Din (3) rezultă:

Prin urmare, orice şir ⊂ *M* conţine un subşir convergent şi deci mulţimea *M* este relativ compactă.

*Reciproc*. Fie acum un spaţiu liniar normat infinit dimenţional. Vom demonstra că în acest spaţiu există o mulţime mărginită, dar care nu este relativ compactă.

Luăm în un element arbitrar *x*1, şi considerăm varietatea liniară  1generată de vectorul *x*1 :  1 ***=*** {λ1 *x*1; λ1 ∈ *R*}. Evident, *dim*  1 = 1şi deci  1 ≠ .Conform lemei Riesz, există  2 ∈ ,

În particular, avem Notam prin  2varietatea liniară generată de vectorii *x*1 şi *x*2  ***,*** adică:  2 ***=*** {λ1*x*1 + λ2*x*2; λ1 , λ2 ∈ *R*}.Este clar că dim *dim* 2 şideci  2  ≠ . Conform lemei Riesz există ∈ ,

În particular, . Continuăm acest proces la nesfîrşit şi obţinem şirul cu proprietaţile: (∈ *N),*

Conform primei proprietaţi, mulţimea *M=* este mărginită. Cea de a doua proprietate arată, că mulţimea *M=*conţine subşiruri convergente. Prin urmare, mulţimea *M* este mărginită , insă nu este relativ compactă.

**§ 27. Spaţiile *Lp*(T, Σ, μ) (1 ≤ *p* <∞)**

Fie (T, **Σ**, μ) un spaţiu cu măsură, adică *T* este o mulţime oarecare nevidă , **Σ**  - o σ- algebră cu unitatea *T* şi μ - o măsură σ - aditivă completă, definită pe **Σ**. Fie, în continuare, *p* un număr real *p* ≥ l. O funcţie măsurabilă *x* : *T* → *K* (*K* ∈ *R* sau *K* ∈ *C*) se zice *p* - integrabilă pe *T*, dacă funcţia |*x*(*t*)|*p* este integrabilă Lebesgue pe această mulţime.

Pentru orice α, β ∈ *K*, avem

.

De aici imediat rezultă că suma *x* + *y* a două funcţii *x*, *y* *p* - integrabile este o funcţie *p* - integrabilă. Este evident că, dacă *x* este *p* - integrabilă, atunci şi α*x* este *p* - integrabilă.

Vom considera mulţimea tuturor funcţiilor *p* - integrabile *x* : T → *K* şi vom introduce următoarea relaţie de echivalenţă: *x*~ *y* dacă *x*(*t*) = *y*(*t*) aproape peste tot (a.p.t).

Să notăm cu *Lp(T, Σ, μ)*mulţimea tuturor claselor de echivalenţă.

Dacă *x* şi *y* sînt funcţii aparţinînd la clase diferite şi , iar *z*(*t*) = *x*(*t*) + *y*(*t*), atunci *z* aparţine unei clase . Clasa depinde de clasele şi şi nu depinde de reprezentanţii concreţi *x* şi *y* din aceste clase. Într-adevăr, dacă *x1* şi *y*1 sînt alţi doi reprezentanţi ai claselor şi , atunci *x* ~ *x1*, *y* ~ *y1*, adică *x*(*t*) = *x1*(*t*), *y*(*t*) = *y1*(*t*) a.p.t. şi deci *x*(*t*) + *y*(*t*) = *x1*(*t*) + *y1*(*t*) a.p.t., ceea ce implică *x* + *y* ~ *x1* + *y1*.

Prin definiţie punem: clasa este suma claselor şi . Dacă α ∈ *K* şi este o clasă oarecare de echivalentă, atunci α va fi clasa care conţine elementul α*x* (prin definiţie)

Cu aceste operaţii, mulţimea *Lp(T, Σ, μ)*devine un spaţiu liniar. Vom conveni în viitor să notăm cu *x* clasa determinată de funcţia *x*.

Ca şi pentru funcţiile continue se demonstrează:

1. inegalitatea Holder: 1 < *p* < ∞, *p*-1 + *q*-1 = 1, *x* ∈ *Lp(T, Σ, μ)***,**∈*Lq(T, Σ, μ)*implică *x*∈  *(T, Σ, μ)*şi
2. inegalitatea Minkowski: 1 *p* < ∞, *x, y* ∈ *Lp(T, Σ, μ)*implică

Spaţiul liniar *Lp(T, Σ, μ)*poate fi organizat ca spaţiu liniar normat, punînd

Proprietăţile normei

1. || *x* || ≥ 0; || *x* || = 0, dacă şi numai dacă *x* = 0,
2. || α*x* || = | α| ⋅ || *x* ||

rezultă din proprietăţile integralei Lebesgue.

Proprietatea a treia a normei (inegalitatea triunghiului) coincide cu inegalitatea Minkowski.

Spaţiul liniar normat *Lp(T, Σ, μ)*se numeşte spaţiul funcţiilor *p* - integrabile (sau *p* - sumabile), deşi elementele lui sînt clase de funcţii.

Convergenţa în normă în spaţiul *Lp(T, Σ, μ)*se mai numeşte şi convergenţă în medie de ordinul *p*.

În cazul cînd *T* = [*a*, *b*], iar μeste măsura Lebesque, scriem *Lp*[*a*, *b*].

**Teorema 1.** Spaţiul *Lp*(T, Σ, μ)este spaţiu Banach.

**Demonstraţie.** Vom demonstra completitudinea acestui spaţiu. Fie un şir fundamental de elemente ale lui *Lp(T, Σ, μ)*Din consecinţa teoremei 3, §7 rezultă că putem extrage un subşir astfel încît

Aplicînd inegalitatea Holder, obţinem

și deci seria

este convergentă.

De aici și din teorema Levi, privind trecerea la limită sub semnul integrală Lebesque, rezultă că seria

converge a.p.t. și deci converge a.p.t. și seria

Sumele parțiale ale ultimei serii coincid cu și , prin urmare, a.p.t. pe *T* şirul este convergent.

Punem

Vom demonstra că ∈ *Lp(T, Σ, μ)* şi Fie ε > 0 și un număr, astfel ca pentru orice *n, m* ≥ *n*0 să avem

Dacă *n,*

Deoarece

a.p.t. ,

aplicînd teorema Fatou, obţinem,

adică şi *xn* – *x* *Lp(T, Σ, μ)*şi (). Însă şi deci *x* ∈ *Lp(T, Σ, μ)* **,** ceea ce împreună cu relaţia () implică: şirul converge către *x* în *Lp*(T, Σ, μ).

**Teorema 2.** Mulţimea funcţiilor măsurabile şi mărginite este densă în *Lp(T, Σ, μ)*

**Demonstraţie.** Fie *x* ∈ *Lp(T, Σ, μ)* **,** ε > 0, *An* = {*t* ∈ *T* : *n* – l ≤ | *x*(*t*) | < *n*}.

Avem

şi

Deci există *n*0 ∈ *N* astfel încît

Notăm

Atunci *T* = *A* ∪ *B* şi din (1) avem

Punem

Este evident că funcţia *y*(*t*) este măsurabilă, mărginită şi

În cele ce urmează spaţiul *Lp(T, Σ, μ)*se va presupune real.

**Teorema 3.** Fie *T* un paralelipiped în *Rm*, μ - măsura Lebesgue. Mulţimea funcţiilor continue pe *T* este densă în spaţiul *Lp(T, Σ, μ)*

**Demonstraţie.** Fie *x* ∈ *Lp(T, Σ, μ)*şi ε > 0. Conform teoremei 2, există o funcţie măsurabilă, mărginită *y ,* astfel încît (*t* ∈ *T*) şi

Aplicînd teorema Luzin, obţinem o funcţie continuă *z*(*t*) pe *T* cu proprietăţile:

(*t* ∈ *T*),

unde *B* ={*t* ∈ *T* : *z*(*t*) ≠ *y*(*t*)}.

Avem

În consecinţă

**Teorema 4.** În spaţiul *Lp*este densă mulţimea *P* a tuturor polinoamelor cu coeficienţi raţionali.

**Demonstraţie.** Fie *x* ∈ *Lp*ε > 0. Din teorema 3 rezultă existenţa funcţiei continue *z* cu . În §6 am stabilit că mulţimea *P* este densă în *C*[*a*, *b*] şi deci există un polinom ∈ *P* , astfel încît

Avem

şi deci < ε.

**Consecinţă.** Spaţiul *Lp* (1 ≤ *p* < ∞) este separabil.

**Teorema 5.** În spaţiul *Lp* (*b* – *a* = 2π) este densă mulţimea polinoamelor trigonometrice

.

**Demonstraţie.** Fie *x* ∈ *Lp*ε > 0. Conform teoremei 3, există *z* ∈ *C*[*a*, *b*], astfel încît

Fie | *z*(*t*) | ≤ *M*  (*a* ≤ *t* ≤ *b*) şi Punem

Evident , funcţia este continuă, | | ≤ *M* (*a* ≤ *t* ≤ *b*) şi această funcţie poate fi prelungită prin periodicitate pe toată axa reală. Conform teoremei Weierstrass, există un polinom trigonometric *h*(t) , astfel încît

Avem

==≤≤ 2 *M* 2 *M=* ,

==

şi deci

≤ε.

**§ 28. Spaţiul L∞(T, Σ, μ)**

Fie μo măsură σ - aditivă completă, definită pe o σ - algebră **Σ**cu unitatea *T*. Să considerăm mulţimea tuturor funcţiilor *x* : *T* → *R* măsurabile şi mărginite a.p.t., adică există o constantă *Cx* ≥ 0 astfel încît | *x*(*t*) | ≤ *Cx* a.p.t. Vom introduce în această mulţime relaţia de echivalenţă în modul următor: *x* ~ *y*, dacă *x*(*t*) = *y*(*t*) a.p.t. Vom nota cu L∞(T, Σ, μ)mulţimea tuturor claselor de echivalenţă.

Introducem operaţiile de adunare a două clase şi de înmulţire a unei clase printr-un număr ca şi în *Lp(T, Σ, μ)*

Fie *x* o funcţie măsurabilă şi mărginită a.p.t. pe *T*. Se numeşte suprem essenţial sau suprem adevărat al lui *x*(*t*) pe *T* şi se notează prin

sau

,

mărimea

Aici marginea inferioară se ia în raport cu toate submulţimile de măsură zero.

**Teoremă.** Multimea L∞(T, Σ, μ)formează un spaţiu Banach cu norma =│.

Demonstraţia acestei teoreme se face în mod direct şi de aceea o lăsăm pe seama cititorului. Spre deosebire de spaţiile *Lp*spatiul *L∞* nu este separabil. Intr-adevăr,fie

Multimeaeste nenumărabilă şi

=1 (≠

Este suficient acum să aplicăm teorema 2,§6.

III. **SPATII HILBERT**

**§ 29. Spaţii Hilbert. Exemple**

**Definiţia** **1.** Fie *E* un spaţiu liniar peste cîmpul *K* (real sau complex). Se zice că pe *E* este definit un produs scalar, dacă fiecărei perechi ordonate de elemente *x*, *y* ∈ *E* îi este pus în corespondenţă un anumit număr din *K*, ce se notează de regulă prin (*x*, *y*), numit produsul scalar al elementelor *x* şi *y* , astfel încît pentru orice *x*, *y, z* ∈ *E,* λ ∈ *K* sînt îndeplinite următoarele condiţii (axiome ale produsului scalar):

l. (*x*, *x*) ≥ 0; (*x*, *x*) = 0, dacă şi numai dacă *x* = 0;

2. () = (*y*, *x*) ;

3. (*x* + *y*, *z*) = (*x*, *z*) + (*y*, *z*);

4. (λ*x*, *y*) = λ(*x*, *y*).

În cazul spaţiului real (*K* ∈ *R*) axioma 2, evident, ia forma (*x*, *y*) = (*y* , *x*).

**Exemple.**

l . În spaţiul *Rm* produsul scalar poate fi definit prin formula

Se vede uşor că această formulă într-adevăr defineşte un produs scalar, adică sînt îndeplinite condiţiile 1)4).

2. În spaţiul *C m* produsul scalar îl vom defini în felul următor:

1. În spaţiul *l*2produsul scalar îl vom defini prin formula

Convergenţa absolută a seriei (1) rezultă din inegalitatea Holder (§2).

1. În spaţiul ***L2*(T, Σ, μ)** vom defini produsul scalar prin formula

(2)

Existenţa integralei (2) rezultă din inegalitatea Holder (§27). Proprietăţile l)-4) rezultă din proprietăţile integralei Lebesque.

1. În spaţiul *C*[*a*, *b*] definim produsul scalar prin formula

În continuare menţionăm cîteva din cele mai simple proprietăţi ale produsului scalar ce rezultă direct din definiţie.

1. (0, *x*) = (*x*, 0) = 0.

Întradevăr, (0, *x*) = (0⋅*y*, *x*) = 0⋅(*y*, *x*) = 0.

1. (*x*, *y* + *z*) = (*x*, *y*) + (*x*, *z*). Avem

Din b) şi c) imediat rezultă

**Teorema** **1.** Dacă *E* este un spaţiu liniar înzestrat cu un produs scalar, atunci are loc inegalitatea

oricare ar fi *x* , *y*∈ *E* numită inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz. În inegalitatea (3) semnul egalităţii are loc , dacă şi numai dacă există λ ∈ *K* astfel încît *x* = λ*y* sau *y* = λ*x*.

**Demonstraţie.** Se vede uşor că dacă *x* = λ*y* sau *y* = λ*x* ,atunci

Dacă *y* = 0, atunci relaţia (3) devine o egalitate şi *y* = λ*x* cu λ = 0. Fie *y* ≠ 0.

Atunci cu avem

sau

,

ceea ce implică (3). Dacă în 3) are loc semnul egalității, atunci deci

**Teorema 2.** Dacă (*x*, *y*) este un produs scalar, definit într-un spaţiu liniar *E* , atunci funcţia

(4)

este o normă în *E*.

**Demonstraţie**. Să ne convigem că prin forma (4) se defineşte o normă în *E*. Avem

1. dacă şi numai dacă şi deci
2. = =

Aici prin *Re*(*x*, *y*) am notat, ca de obicei, partea reală a numărului complex (*x*, *y*). Evident, . Utilizînd inegalitatea Cauchy- Buniakovski Schwartz , obţinem

De aici rezult.

**Observație.** Dacă norma în *E* este definită de un produs scalar

atunci , dacă și numai dacă *x* = λ*y* sau *y* = λ*x* cu λ ≥ 0.

Într-adevăr, dacă *y* = λ*x* cu λ ≥ 0 atunci și

Reciproc, fie **.** Din demonstratia teoremei 2 rezultă, că în acest caz inegalitatea Cauchy- Buniakovski –Schwartz este o egalitate şi deci *x* = λ*y* sau *y=*  λ*x.* Fie *y=*  λ*x* . Avem

Pentru *x* ≠ 0 de aici obţinem , ceea ce implică λ ≥ 0*.* Dacă însă *x* = 0, atunci şi *y* = 0 şi drept λse poate lua orice număr nenegativ.

**Definiţia** 2. Se numeşte spaţiu prehilbertian un spaţiu liniar normat ℋ, în care norma este definită de un anumit produs scalar, adică în ℋ este definit un produs scalar (*x*, *y*), astfel încît

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz într-un spaţiu prehilbertian se scrie asfel

**Definiţia 3.** Se numeşte spaţiu hilbertian (sau spaţiu Hilbert) orice spaţiu Banach, în care norma este definită de un produs scalar pin formula

Cu alte cuvinte, un spaţiu hilbertian este un spaţiu prehilbertian care este şi complet ca spaţiu normat.

Spaţiile *Rm*,*Cm*, *l*2, *L2*(T, Σ, μ)din exemplele 1-4 sînt spaţii Hilbert, iar spaţiul *C*[*a*, *b*] cu produsul scalar

este un spaţiu prehilbertian, dar care nu este spaţiu Hilbert (*C2*[*a*, *b*] nu este complet; §20, exemplul 6).

**Teorema 3.** Într-un spaţiu prehilbertian produsul scalar este continuu faţă de convergenţa în normă, adică din şi rezultă .

**Demonstraţie.** Fie şi . Avem

Șirul fiind convergent, este și mărginit, deci există o constantă , astfel încît . Avem

și deci

**§ 30. Proprietatea caracteristică a spaţiilor prehilbertiene**

Fie ℋun spaţiu prehilbertian. Pentru orice *x*, *y* ∈ ℋavem

Identitatea obţinută

se numeşte identitatea paralelogramului.

John von Neumann şi Iordan în anul 1935 au demonstrat că identitatea paralelogramului este o proprietate caracteristică a spaţiilor prehilbertiene.

**Teoremă.** Pentru ca un spaţiu liniar normat ℋsă fie spaţiu prehilbertian este necesar şi suficient ca pentru orice *x*, *y* ∈ ℋsă fie adevărată identitatea paralelogramului.

**Demonstraţie.** Necesitatea condiţiei acestei teoreme a fost stabilită mai sus. Să demonstrăm suficienţa. Fie că în spaţiul liniar normat ℋ pentru orice elemente *x*, *y* este adevărată egalitatea (1).Vom demonstra că în ℋ poate fi definit un produs scalar (*x*, *y*), astfel încît pentru orice *x* ∈ ℋ*.* Vom considera cazul spaţiului real. În acest caz punem

(2)

Vom arăta că formula (2) defineşte un produs scalar care generează norma din spaţiul ℋ*.*

Avem

=0 dacă şi numai dacă şi deci = ;

Deci primele două axiome ale produsului scalar sunt adevărate.. Trecem la a treia. Utilizînd formula (2) şi identitatea paralelogramului, obţinem

De aici rezultă justeţea celei de-a treia proprietăţi a produsului scalar:

Din această egalitate avem

Utilizînd metoda inducţiei matematice, stabilim că

pentru orice *n* ∈ *N*.

Înlocuind pe *x* cu *x,* obţinem

sau

În consecinţă pentru orice *m* ∈ *N* avem

Din (2) rezultă că

şi deci sau

De aici şi din (3) obţinem

(4)

Prin urmare, ţinînd cont de (3) şi (4), pentru orice număr raţional *r* ∈ Q avem

(5)

Fie acum λ ∈ *R* un număr real arbitrar. Dacă *rn* ∈ Q, *rn* atunci, utilizînd continuitatea operaţiilor algebrice şi a normei într-un spaţiu normat, obţinem

Pe de altă parte, din (5) avem

Conform unicităţii limitei unui şir convergent, avem

,

adică şi cea de-a patra axiomă a produsului scalar este satisfăcută. Aşadar, pentru cazul spaţiului real teorema este demonstrată.

Dacă spaţiul normat este complex, considerăm expresia

(6)

Utilizînd (2), constatăm că relaţia (6) se poate scrie sub forma

Din cele demonstrate mai sus rezultă, că

(7)

(

Pe de altă parte, pentru numărul imaginar *i* avem

Pentru orice număr complex λ + *i*μ acum obţinem

Proprietăţile 1)2) ale produsului scalar rezultă direct din (6):

(9)

(10)

Relaţiile (7) (10) arată, că formula (6) defineşte un produs scalar în spaţiul normat complex ℋ, astfel încît pentru orice *x* ∈ ℋ. Teorema este demonstrată.

Exemple.

1. Din paragraful precedent cunoaştem că spaţiul *l*2 este spaţiu Hilbert. Fierşte apare întrebarea : mai sînt oare printre spaţiile *lp* (*1* *p* ∞) spaţii Hilbert ? Să arătăm că nu sînt. În adevăr, fie *lp* spaţiu Hilbert. Atunci pentru avem

,

şi deci, conform identităţii paralelogramului, avem

1. În spatiul *C*[*0*, *1*] să luăm Avem =2, =1 şi deci = 5 ≠ 4= Prin urmare spatiul *C*[*0*, *1*] nu este spatiu Hilbert.

**§ 31. 0rtogonalitate în spaţiile prehilbertiene**

Fie ℋ un spaţiu prehilbertian.

**Definiţia** **1.** Doi vectori *x*, *y* ∈ ℋse numesc ortogonali, dacă (*x*, *y*) = 0. Se notează *x* ⊥ *y*.

Este evident că *x* ⊥ *yk* (*k* = l, 2, …, *n*) implică

**Teorema 1.** (Pitagora). Dacă vectorii din spaţiul prehilbertian sînt ortogonali doi cîte doi, atunci

În particular, dacă *y* atunci = .

**Demonstraţie.** Vectorii sînt ortogonali doi cîte doi şi deci (*j* ≠ *k*), ceea ce implică

Această teoremă se generalizează pentru o mulţime numărabilă de vectori. Desigur, în acest caz trebuie să asigurăm convergenţa seriilor respective. Este adevărată

**Teorema 2.** Fie un şir de vectori ortogonali doi cîte doi în spaţiul Hilbert ℋ*.* Seria

(1)

converge în ℋ, dacă și numai dacă este convergentă seria numerică

(2)

În cazul convergenței seriei (1), avem

**Demonstrație.** Fie seria (1) convergentă. Conform criteriului de convergență al seriilor în spațiile Banach, pentru orice ε > 0 există *n*0 ∈ *N* , astfel încît

(3)

oricare ar fi *n* ≥ *n*0 şi *p* ∈ *N*.

Ţinînd cont de teorema 1, ridicăm ambele părţi ale inegalităţii (3) la pătrat şi obţinem

(4)

oricare ar fi *n* ≥ *n*0 şi *p* ∈ *N*. De aici, conform criteriului Cauchy de convergenţă al seriilor numerice, obţinem că seria (2) este convergentă. Prin urmare, convergenţa seriei (1) în spaţiul Hilbert ℋ implică convergenţa seriei numerice (2). Repetînd acelaşi raţionament în ordine inversă, obţinem că din convergenţa seriei (2) rezultă convergenţa seriei (1).

Să demonstrăm acum partea a doua a teoremei. Dacă

atunci, utilizînd teorema 1, putem scrie

(5)

Cum însă

şi norma este o funcţie continuă, avem

Trecem acum la limită în egalitatea (5) şi obţinem

**Definiţia 2.** Se zice că vectorull *x* ∈ ℋeste ortogonal pe mulţimea nevidă *A* ⊂ ℋ*,* dacă *x* ⊥ *y* oricare ar fi *y* ∈ *A*. Se notează *x* ⊥ *A*.

**Teorema 3.** Vectorul *x* ∈ ℋeste ortogonal pe mulţimia *A* ⊂ ℋ*,* dacă şi numai dacă *x* este ortogonal pe închideria acestei mulţimi.

**Demonstraţie.** Deoarece *A* ⊂ evident, rezultă *x* ⊥ *A*. Reciproc, fie x ⊥ *A*. Dacă ∈ , atunci există cu

Produsul scalar fiind o funcție continuă, avem

Deci *x* ⊥ *y* pentru orice *y* ∈ şi prin urmare *x* ⊥ **.**

**Consecinţă.** Dacă mulţimea *A* este densă în spaţiul ℋşi *x* ⊥ *A* , atunci *x* = 0.

Într-adevăr, în acest caz *x* ⊥  **=** ℋşi, în particular *x* ⊥ *x*. Însă (*x*, *x*) = 0 implică *x* = 0.

**Definiţia 3.** Fie *A* o mulţime nevidă din ℋ*.* Mulţimea se numeşte complementul ortogonal al lui *A*.

**Teorema 4.** Mulţimea este un subspaţiu al spaţiului ℋ*.*

**Demonstraţie.** Fie *y*, *z* ∈ , α ∈ *K.* Pentru orice *x* ∈ *A* avem (*x*, *y*) = (*x*, *z*) = 0 şi deci (*x*, *y* + *z*) = (*x*, *y*) + (*x*, *z*) = 0, (*x*, α *y*) =(*x*, *y*) = 0. Prin urmare, *y* + *z*∈ , α*y*∈ adică este varietate liniară. Ea este şi inchisă , deoarece dacăatunci pentru orice *x*∈ *A* avem (*x*, ) = (*x*, *y*). Însă, deoarece (*x*, )=0 , rezultă că (*x*, *y*) =0 şi deci *y*∈ .

**Definiţia 4.** Mulţimile din spatiul ℋ se numesc ortogonale, dacă *x* ⊥ *y* oricare ar fi *x*∈ *y*∈. Se scrie .

**§ 32. Distanţa de la un punct la o mulţime convexă**

**Definiţia 1.** Fie *E* un spaţiu liniar şi *x*, *y* ∈ *E*. Se numeşte segment de extremităţi *x* şi *y* (se notează [*x*, *y*]) mulţimea tuturor elementelor de forma

Se spune că o mulţime *M* din *E* este convexă, dacă pentru orice pereche de elemente *x*, *y* ∈ *M* tot segmentul [*x*, *y*] aparţine mulţimii *M*.

Exemple.

1. Orice varietate liniară într-un spaţiu liniar este mulţime convexă.

2. Orice sferă într-un spaţiu liniar normat este mulţime convexă,

Într-adevăr, fie *x*, *y* ∈ *S*(*a*, *r*). Atunci || *x* – *a* || < *r*, || *y* – *a* || < *r* şi deci

Prin urmare ∈ *S*(*a*; *r*) oricare ar fi *λ:* ***.***

Ţinînd cont de definiţia distanţei de la un punct la o mulţime într-un spaţiu metric e firesc să acceptăm următoarea definiţie.

**Definiţia 2.** Fie un spaţiu liniar normat, *M* o mulţime oarecare nevidă din şi *x* ∈ . Se numeşte distanţă de la *x* la *M* numărul nenegativ

**Teoremă**. Fie ℋun spaţiu Hilbert, *M* o mulţime nevidă convexă şi închisă în ℋ*.* Pentru orice *x* ∈ ℋexistă în *M* un element *y*, determinat în mod unic, astfel încît || *x* – *y* || = ρ(*x*, *M*) . Cu alte cuvinte, pentru orice *x* ∈ ℋîn mulţimea *M* există elementul de cea mai buna aproximare a lui *x* (elementul ce realizează distanţa de la *x* la *M*) şi un astfel de element este unic.

**Demonstraţie.** Fie *x* ∈ ℋ*.* Pentru simplitate punem ρ(*x*, *M*) = ρ. Avem deci

Conform definiţiei marginii inferioare, există un şir astfel că

(1)

Să arătăm că şirul este fundamental. Aplicăm identitatea paralelogramului şi obţinem

De aici rezultă egalitatea

(2)

Întrucît elementele , mulţimea *M* fiind convexă, avem

(în definiţia segmentului punem ). Prin urmare,

(3)

Din (l) (3) obţinem

(*m*, *n* → ∞)

şi deci şirul este fundamental. Spaţiul ℋfiind complet, rezultă că acest şir este convergent. Fie

Mulţimea *M* este închisă şi deci *y* ∈ *M*. Trecem la limită în inegalităţile (1) şi obţinem : adică .

Să demonstrăm unicitatea elementului de cea mai buna aproximare din *M*. Fie unde *y*, *y*1 ∈ *M*. Ţinînd cont, că mulţimea *M* este convexă, avem ∈ *M* şi deci

Prin urmare,, adică în inegalitatea triunghiului are loc semnul “ egal “, ceea ce în orice spaţiu Hilbert implică existenţa unui număr *λ* ≥ 0,astfel încît

De aici . Egalitatea implică sau λ = 1*.* În ambele cazuri .

**Observaţie.** Într-un spaţiu Banach arbitrar o teoremă analogă nu este adevărată, adică în mulţimea *M* poate să nu existe elementul cel mai apropiat de elementul *x* sau pot că existe mai multe elemente ce realizează distanţa de la *x* la *M*. Dăm exemplele respective.

l . În spaţiul *C*[0, l] considerăm subspaţiul *L* = {*x* ∈ *C*[0, l] : *x*(0) = 0} şi elementul *x*0(*t*)= l. Atunci:

Pe de altă parte, . De aici Se constată fără dificultate, că pentru orice *y* ∈ cu proprietatea 0 ≤ *y*(*t*) ≤ 2 avem şi deci toate aceste funcţii realizează distanţa de la la *L* (putem, considera, de exemplu, *y*(*t*) = = *sin* α*t*, 0 ≤ α ≤ l). Aici, pentru elementul *x*0∈ *C*[0, l] în mulțimea *L* există o mulțime infinită de elemente de cea mai bună aproximare.

1. În spaţiul *l*1 considerăm mulţimea

Se vede ușor că mulțimea *M* este varietate liniară (și deci mulțime convexă) închisă în . Să arătăm că pentru orice , *x* ≠ 0 avem

Elementele și deci

││

Să demonstrăm în continuare că pentru orice *x*0, *x*0în mulțimea nu există un element de cea mai bun aproximare. Admitem contrariul. Fie 0 =Notăm Avem şi =====Conform celor demonstrate mai sus, egalitatea = este imposibilă , deoarece Aşadar pentru orice *x*0, *x*0în mulţimea nu există un element de cea mai bună aproximare, deşi mulţimea este convexă ( chiar este subspaţiu ).

**§ 33. Proiecţia unul vector pe un subspaţiu**

Fie un subspaţiu al spaţiului Hilbert ℋ. Confonn teoremei din paragraful precedent (deoarece subspaţiul este un caz particular al mulţimii convexe şi închise) , pentru orice *x* ∈ ℋexistă un element unic determinat *y* ∈ astfel încît ρ(*x*, ) = =|| *x* **–** *y* **||**.Acest element *y*posedă o proprietate importantă , ceea ce rezultă din

**Teorema 1.** Dacă *x* ∈ ℋ*, y* ∈  şi atunci *x* – *y* ⊥

**Demonstraţie.** Fie *z* ∈ , *z* ≠ 0. Punem şi considerăm elementul . Evident, ∈ şi

=

Prin urmare

.

De aici rezultă

şi deci= 0. Întrucît elementul a fost luat arbitrar în , rezultă că

**Observaţie.** Dacă pentru *x* ∈ ℋ, *y* ∈  avem *x* – *y* ⊥ , atunci

Într-adevăr, fie *y*1 ∈ un element arbitrar din Elementul implică Aplicam teorema Pitagora şi obţinem

==+.

Prin urmare, pentru orice *y*1 ∈ . De aici rezultă că

**Teorema 2.** Dacă ℋ este un spaţiu Hilbert, iar un subspaţiu al lui ℋ*,* atunci orice element *x* ∈ ℋ se reprezintă în mod unic sub forma *x* = *y* + *z* cu *y* ∈ , *z* ∈  ⊥.

**Demonstraţie**. Pentru orice *x* ∈ ℋ,în virtutea teoremei din paragraful precedent şi a teoremei 1, există un element *y* ∈ încît *x* – *y* ⊥ . Notăm *x* – *y* = *z* şi obţinem *x* = *y* + *z*, *y* ∈ , *z* ∈  ⊥*.* Să demonstrăm unicitatea reprezentării. Fie *x* = *y*' + *z*', *y*' ∈ , *z*' ∈  ⊥. Avem *x* + *y* = *y*' + *z*', *y* – *y*' = *z*' – *z* . Însă  ⊥ este de asemenea un subspaţiu şi deci *z*' – *z* ∈  ⊥ (sau *z*' – *z* ⊥ ). De aici *y*–*y*' = *z*' – *z* ⊥ . Din *y* – *y*' ∈ şi *y*–*y*' ⊥ rezultă (*y* – *y*', *y* – *y*') = 0. Ultima egalitate implică *y* – *y*' = 0, ceea ce la rîndul său implică *y*' = *y*, *z*' = *z*.

Avînd în vedere definiţia sumei directe a două subspaţii, din teorema 2 obţinem

**Teorema 3.** Fie un subspaţiu al spaţiului Hilbert ℋ, iar  ⊥ – complementul ortogonal al subspaţiului . Spaţiul ℋeste suma directă a subspaţiilor şi  ⊥:

ℋ =  ⊥ adică orice *x* ∈ ℋ în mod unic se reprezintă sub forma *x* = *y* + *z* cu *y* ∈ *, z* ∈ ⊥.

**Definiţia** **1.** Dacă spaţiul ℋeste suma directă a subspaţiilor şi cu ⊥ , atunci spunem că ℋeste suma ortogonală a subspaţiilor şi şi scriem ℋ = ⊕ .

Teorema 3 acum poate fi formulate astfel:

**Teorema** **3'.** Fie un subspaţiu al spaţiului Hilbert ℋ*,* iar  ⊥ – complementul ortogonal. Spaţiul ℋ este suma ortogonală a subspaţiilor şi  ⊥ : ℋ = ⊕  ⊥.

**Definiţia 2.** Dacă *x* = *y* + *z*, unde *y* ∈ *, z* ⊥ , atunci spunem că *y* este proiecţia vectorului *x* pe şi scriem *y* = *x*.

Este clar că în mod analog *z* = *x.*

**Consecinţa** **1.** Fie  1 şi  2  – două subspaţii ale spaţiului Hilbert ℋ ,  1  2  ,  2   1xistă în  2  un element e, astfel încît , *e* ⊥  1.

Într-adevăr, din teorema 3 avem  2  =  1⊕ . Subspaţiul ≠ {0} şi deci există un vector *e* ∈ , . Evident, *e*∈ 2  , *e* ⊥  1 .

**Consecinţa 2.** Fie o varietate liniară în spaţiul Hilbert ℋ*.* Mulţimea este densă în ℋ*,* dacă şi numai dacă *x* ⊥ implică *x* = 0 (adică  ⊥ *=* {0})*.*

Într-adevăr, dacă = ℋşi *x* ⊥ atunci *x* ⊥ ℋ,ceea ce implică *x* ⊥ *x*, adică *x* = 0. Dacă însă ≠ ℋ *,* atunci conform consecintei 1, există în ℋun vector *e* astfel încît şi *e* ⊥ .

**§ 34. Sisteme ortonormate complete**

Fie ℋ un spaţiu Hilbert.

**Definiţia 1.** Unsistem de vectori {*xj*}ℋ se numeşte total, dacă *x* ∈ ℋ, *x* ⊥ *xj* (∀ *j*) implică *x* = 0.

**Teorema 1.** Sistemul {*xj*} **⊂** ℋeste total, dacă şi numai dacă el este complet în ℋ*.*

**Demonstraţie.** Fie {*xj*}un sistem complet, adică . Dacă *x* ⊥ *xj* (∀ *j*) atunci

şi deci *x* ⊥ ceea ce implică *x* ⊥= În particular, *x* ⊥ *x ,* adică  *x=.* Prin urmare, sistemul {*xj*}este total.

Fie că nu este complet, adică ≠ . Conform consecinţei 1 şi §33, există *e* ∈ cu şi *e* ⊥ În particular, *e* ⊥ (∀ *j*), adică sistemul nu este total.

**Definiţia 2.** Sistemul de elemente {*xj*} **⊂** ℋse numeşte sistem ortogonal, dacă  ⊥ ({*xj*} **⊂** ℋ se numeşte ortonormat (sau ortonormal), dacă este ortogonal şi dacă oricare ar fi *j*, adică

**Teorema 2.** Dacă este un sistem ortogonal şi nu conţine elementul nul, atunci elementele acestui sistem formează o mulţime liniar independentă.

**Demonstraţie.** Fie

Pentru orice *k* = l, 2, ..., *m* avem

Întrucit că *k* = l, 2, ..., *m* ) şi deci sistemul este liniar independent.

Să examinăm problema existenţei sistemelor ortonormate totale în spaţiile Hilbert.

**Teorema** **3.** Dacă spaţiul Hilbert este separabil, atunci există un sistem finit sau numărabil de vectori  **,** ortonormat şi total în ℋ.

**Demonstraţie.** Vom considera cazul *dim* ℋ ***=*** ∞(în cazul *dim* ℋ < ∞ raţionamentul este mai simplu). Fie o mulţime peste tot densă în ℋ şi≠0.Punem *n*1 = l. Notăm prin *n*2 cel mai mic indice pentru care vectorii şi sunt liniar independenţi, prin *n*3 cel mai mic indice pentru care vectorii sînt liniar independenţi şi aşa mai departe. Prin inducţie obţinem şirul . Notăm

şi  k = (*k* = 1, 2, …)

Fără dificultate se constată că *dim*  k ***=*** *k* şi  k (*k* = 1, 2, …). De aici imediat rezultă . Întrucit mulţimea este peste tot densă, avem ℋ = ⊂ = de unde rezultă egalitatea = ℋ, ceea ce arată că este un sistem complet. Aşa cum

1 ⊂  2 ⊂ … ⊂  k ⊂ …( k ≠) , din consecinţa 1 §33 avem: există *ej* ∈  *j* , *ej* ⊥  *j* –1 (*j* = 2, 3, ...).

*Punem .*  este un sistem ortonormat şi = . De aici = ℋ şi deci este un sistem ortonormat şi complet în ℋ.

Să expunem încă o metodă de obţinere a unui sistem ortonomat complet, pornind de la un sistem complet de vectori liniar independenţi, şi anume, metoda de ortogonalizare Gram-Schmidt.

**Teorema** **4.** Fie un sistem de vectori liniar independenţi în spaţiul Hilbert ℋ*.* Există un sistem ortonormat astfel încît

pentru orice *n*.

**Demonstraţie.** Punem . Alegem vectorul astfel ca (*z*2, *e*1) = 0. De aici avem:

,

de unde rezultă că . Elementul *z*2 ≠ 0, deoarece vectorii şi sînt liniar independenţi. Punem . Evident . Din

imediat obţinem

Pentru a demonstra teorema, vom utiliza metoda inducţiei matematice. Fie sistemul de elemente obţinut din cu proprietăţile

Vom construi elementul în modul următor: alegem elementul, astfel ca (*j* = l, 2, …, *k*). De aici avem (*j* = l, 2, …, *k*).

Conform egalităţilor (1) avem

şi deci

Prin urmare, . Vectorii fiind liniar independent , rezultă că Punem = şi obţinem

=0 (*j* = l, 2, …, *k*). (2)

Avem

+

= +.

De aici şi din (1)

rezultă ≤ *k +*1*) , .*

Conform principiului inducţiei matemetice, există un sistem ortonormat **,**

astfel încît

pentru orice *n.* Teorema este demonstrată.

Este evident acum, că dacă sistemul de vectori este complet în spaţiul Hilbert ℋ , atunci aplicînd metoda de ortogonalizare Gram-Schmidt, obţinem un sistem ortonormat complet în ℋ.

**§ 35. Serii Fourier în spaţii Hilbert**

Prin ω vom nota un număr natural *n* sau ∞.

Fie un sistem ortonormat (finit sau numărabil) în spaţiul Hilbert ℋ. Pentru orice *x* ∈ ℋ numerele

se numesc coeficienţii Fourier ai vectorului *x* în raport cu sistemul seria “

(1)

se numeşte seria Fourier a elementului *x*.

**Observaţie.** Dacă ω= *n*∈ *N,* atunci seria Fourier se transformă într-o sumă finită de elemente ale spaţiului ℋ.

**Teorema** **1.** Suma parţială

a seriei (1) este proiecţia vectorului *x* pe subspaţiul ℋ *n* = .

**Demonstraţie.** Să arătăm că ⊥ ℋ *n .* Într-adevăr

,

ceea ce implică ⊥ ℋ*n* .Evident, ∈ ℋ*n* .Prin urmare cu ∈ ℋ *n* ⊥ ℋ*n* ,ceea ce arată că = *x.*

Din această teoremă şi observaţia din **§**33 imediat rezultă

**Consecinţa** **1.** Pentru orice

avem

adică suma parţială a seriei Fourier a elementului *x* reprezintă elementul de cea mai bună aproximație a lui *x* cu elemente din ℋ *n.*

**Consecința 2.** Pentru orice *x* ∈ are loc inegalitatea

(2)

numită inegalitatea Bessel.

Într-adevăr, aplicînd teorema Pitagora, obținem

și deci

(3)

Aşadar inegalitatea (2) este demonstrată pentru orice număr natural *n*, adică pentru ω < ∞. Trecînd la limită în (3) cu *n* → ∞,obţinem (2) şi pentru cazul ω = ∞.

Dacă pentru un element oarecare *x* ∈ ℋ ininegalitatea Bessel are loc semnul “egal”, atunci se spune că pentru acest element *x* este adevărată egalitatea Parseval.

**Teorema 2.** Seria Fourier (1) a oricărui element *x* ∈ ℋ este convergentă. Suma a acestei serii este proiecţia vectorului *x* pe subspaţiul

Suma seriei Fourier a elementului *x* este egală cu *x*, dacă şi numai dacă pentru elementul *x* este adevărată egalitatea Parseval.

**Demonstraţie.** Convergenţa seriei Fourier a elementului *x* rezultă imediat din inegalitatea Bessel şi teorema 2 §31, deoarece

și , *j* ≠ *k*.

Fie suma seriei Fourier

Atunci din aceaşi teoremă avem

Este evident că *.* Să arătăm că *.* Utilizînd continuitatea şi liniaritatea produsului scalar, obţinem

De aici ⊥ şi deci

Prin urmare = *x*.

În continuare avem (aplicînd teorema Pitagora)

De aici obţinem : *s* = *x* , dacă şi numai dacă

adică pentru elementul *x* este adevărată egalitatea Parseval.

Rezumînd cele demonstrate aici şi în paragrafele precedente, ajungem la

**Teorema 3.** Fie un sistem ortonormat în spaţiul Hilbert ℋ*.* Următoarele condiţii sînt echivalente:

1) sistemul este total în ℋ;

2) sistemul este complet în ℋ;

3) pentru orice *x* ∈ ℋ avem

1. pentru orice *x* ∈ ℋeste adevărată egalitatea Parseval

**Demonstraţie.** Conditiile (1) şi (2) sînt echivalente conform teoremei 1 §34, iar (3) şi (4) conform teoremei 2. Să demonstrăm implicaţia 3) → 1). Dacă ⊥ (∀ *j*), atunci şi din 3) rezultă =0, adică sistemul este total. Sa demonstrăm implicaţia 1) → 3). Fie În demonstratia teoremei 2 a fost stabilit, ca (∀ *j*). Întrucît sistemul este total, de aici rezultă egalitatea şi deci Teorema este demonstrată.

Să observăm , că dacă este un sistem ortonormat şi = (∀ *j*). Într-adevăr,

.

De aici şi din teorema 2 obţinem

**Teorema 4.** Pentru ca un sistem ortonormat să fie o bază ortonormată în spaţiul Hilbert ℋeste necesar şi suficient să fie îndeplinită una din următoarele condiţii echivalente:

l) sistemul este total;

2) sistemul este complet;

3) orice vector se poate reprezenta sub forma

4) pentru orice *x* ∈ este adevarata egalitatea Parseval

Să mai observăm, că orice spaţiu Hilbert separabil conţine sisteme ortonormate totale (conform teoremei 3, § 34), adică baze ortonormate.

**§ 36. Izomorfismul spaţiilor Hilbert separabile**

**Teoremă.** Orice două spaţii Hilbert separabile reale (complexe) infinit dimensionale sînt izomorfe şi izometrice.

**Demonstraţie.** Fie şi două spaţii Hilbert separabile reale (complexe) cu şi două baze ortonormate ale acestor spaţii.

Pentru orice avem

Din egalitatea Parseval obţinem

(1)

Vectorii sunt ortogonali doi cîte doi şi deci, conform teoremei 2 § 31, seria

(2)

converge, dacă şi numai dacă este convergentă seria

Însă şi deci din convergenţa seriei (1) rezultă convergenţa seriei (2). Fie

Considerăm acum aplicaţia definită de relaţia *f***(***x*) = *y*, unde

Se vede uşor, că aplicaţia *f* este liniară: pentru orice și α ∈ *R*(respectiv α ∈*C*) .

Aplicaţia *f* este injectivă. Într-adevăr, fie .Dacă

atunci

Însă este o bază ortonormată a spaţiului şi deci relaţia implică ceea ce la rîndul său implică .

Aplicaţia *f* este surjectivă. Dacă *y* ∈*,* atunci

Pentru vectorul ∈avem Prin urmare, aplicaţia *f* este bijectivă.

Să arătăm că *f* păstrează produsul scalar a oricăror doi vectori. În adevăr, fie

şi deci

Avem

şi , prin urmare, .

În particular, dacă , atunci obţinem Deoarece aplicaţia *f* este liniară, avem

adică *f* este o aplicaţie izometrică. Orice izometrie este continuă. Aplicaţia este de asemenea izometrică şi, prin urmare, este şi continuă. Deci este o aplicaţie izomorfă şi izometrică a spaţiului pe spaţiul *.*

**Consecinţă.** Orice spaţiu Hilbert separabil infinit dimensional real (complex) este izomorf şi izometric cu spaţiul *l*2 real (complex). În particular, spaţiul *L2* este izomorf şi isometric cu spaţiul *l*2.

**Observaţie.** Fie şi două spaţii Hilbert finit dimensionale reale (complexe) de aceeaşi dimensiune Dacă sint două baze ortonormate ale spatiilor şi respectiv, atunci evident, aplicaţia definită prin formula

,

stabileşte un izomorfism isometric al spaţiului şi . Prin urmare, teorema demonstrată mai sus este adevărată în cazul spaţiilor Hilbert finit dimensionale de aceea dimensiune.

**§ 37. Baze ortonormate în unele spații concrete**

1. În spațiul *l*2 considerăm sistemul de vectori . El este şi total. Într-adevăr, fie şi = 0 Întrucit = , obţinem Prin urmare, sistemul constitue o bază ortonormată a spațiului Hilbert *l*2.
2. În spațiul L2[-π, π] considerăm sistemul trigonometric

Se vede uşor că

,

,

ceea ce arată că sistemul trigonometric este ortonormat. Conform teoremei 5, § 27, acest sistem este şi complet şi deci formează o bază ortonormată a spaţiului L2[-π, π].

Prin urmare, orice funcţie *x* ∈ L2[-π, π] se dezvoltă în seria Furier a ei în raport cu sistemul trigonometric:

, (1)

unde

Seria (1) converge în spaţiul L2[-π, π].

Dacă vom considera spaţiul L2[-1, 1],atunci din cele de mai sus cu uşurinţă se deduce că sistemul

constituie o bază ortonormată a acestui spaţiu.

1. În spaţiul L2[0, 1]considerăm sistemul

(2)

Sistemul este ortonormat, deoarece

Conform formulelor Euler, avem

Întrucît sistemul este complet în L2[0, 1], combinaţiile liniare ale acestor funcţii formează o mulţime peste tot densă în L2[0, 1].

Prin urmare combinaţiile liniare ale funcţiilor formează o mulţime peste tot densă în L2[0, 1].

Deci sistemul (2) este un sistem ortonormat şi complet în L2[0, 1], adică este o bază ortonormată a spaţiului L2[0, 1]. Prin urmare, pentru orice *x* ∈ L2[0, 1] avem

(3)

şi această serie converge în L2[0, 1]. Seria (3) se numeşte seria Fourier a elementului *x* în formă complexă.

1. În spaţiul L2[-1, 1] sistemul este liniar independent, dar nu este ortogonal. Utilizînd metoda Gram-Schmidt,obtinem un sistem ortonormat.

Sistemul complet (teorema 4, **§ 27)** , şi deci complet este şi sistemul este un sistem ortonormat şi complet în L2[-1, 1], şi deci constitue o bază ortonormată a spaţiului L2[-1, 1]. Se poate demonstra că

Polinoamele

se numesc polinoame Legendre. Prin urmare,

De aici rezultă că orice funcţie *x* ∈ L2[-1, 1] se reprezintă sub forma

(4)

cu

Seria (4) converge în L2[-1, 1].

**BIBLIOGRAFIE**

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Минск: Университетское, 1984.

2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., Наука, 1977.

3. Колмогоров А. Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа М., Наука, 1989.

4 Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965

5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа.

М., Высшая школа, 1982.

6.Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу Минск: Вышэйшая школа, 1978.

7. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа М., Наука, 1979.

8. Крупник Н.Я., Руссу Г.И. Лабораторный практикум по функциональному анализу Кишинев. Молдавский госуниверситет. 1990. Часть I.

9. Cristescu Romulus, Elemente de analiză functională.Bucureşti, 1975.

10. Gaşpar Dumitru. Analiză functională. Timişoara, 1981.

11. Ghica Alexandru. Analiză functională. Bucureşti ,1967.

12. Ionescu Tulcea C.T. Spaţii Hilbert. Bucureşti ,1956.

13. Marinescu G. Tratat de analiză functională. Bucureşti ,1970. Vol. 1.